

تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۰۴ مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه ساعت شروع: ۱۰ صبح تعداد سوالات: ۱۴ سؤال	به نام آنکه جان را فکرت آموخت	آزمون درس: هندسه (۳) پایه: دوازدهم رشته: ریاضی و فیزیک
	اداره کل آموزش و پرورش استان کهگیلویه و بویراحمد معاونت آموزش متوسطه آزمون شبه نهایی فروردین ماه ۱۴۰۲	

((الابدكر الله تطمنن القلوب)) - همانا با یاد خداوند دلها آرام می گیرد.

ردیف	(متن سوالات)	نوبت صبح	صفحه: ۱	بارم
۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) واوَن هر ماتریس در صورت وجود است. ب) نقطه ی $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد. (داخل/خارج) ج) در حالتی که خروج از مرکز بیضی باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. د) اگر سه بردار a, b, c در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر است.			۱
۲	ماتریس های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت های زیر تعریف شده اند. حاصل $2A - 3B$ را بدست آورید. $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ 1 & i = j \\ j-i & i > j \end{cases}, \quad b_{ij} = \text{Max}\{i, j\}$			۱/۲۵
۳	الف) اگر $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i = j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس $B^2 + 3I$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه ۳ است)			۱/۵
۴	الف) اگر $\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{pmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. ب) دترمینان ماتریس $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ را بیابید			۱/۵
۵	دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.			۱/۲۵
۶	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(2, -2)$ و بر خط $4x - 6y + 4 = 0$ مماس باشد			۱
۷	وضعیت خط $4x - 6y = 0$ را نسبت به دایره ی $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مشخص کنید			۱/۵

۱/۵	وضعیت دو دایره ی $x^2 + y^2 - 2x = 80$ و $x^2 + y^2 = 4$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۸
۱	در نقطه ی $A(3, 4)$ روی دایره ی $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 3 = 0$ مماس بر آن رسم کرده ایم، معادله ی این خط مماس را به دست آورید.	۹
۰/۷۵	حدود k را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 12x + 16y + k = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.	۱۰
۱/۵	سه می به معادله ی $y^2 - 4y - 16y + 18 = 0$ را در نظر بگیرید. الف) معادله متعارف و فاصله کانونی را بیابید ب) مختصات راس، کانون و معادله خط هادی سه می را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	مختصات نقاط برخورد سه می $y^2 + 5x + 3 = 0$ و دایره ی $x^2 + y^2 = 36$ را به دست آورید.	۱۲
۱/۵	معادله سه می $x^2 - 8 = 16y + 8$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و راس آن را تعیین کنید	۱۳
۱/۵	الف) طول بردار $\vec{a} = (2, 3, 4)$ را به دست آورید. ب) شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-3 \leq y \leq -2$ و $y < -x^2 + 2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	۱۴
۱/۵	زاویه ی بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, k)$ و $\vec{b} = (1, 0, -1)$ 45° درجه باشد، مقدار k را بیابید.	۱۵
۱/۲۵	مقدار n را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = (n, +1, 3)$ و $\vec{b} = (1, 2n + 1, -1)$ بر هم عمود باشند.	۱۶

پیروز و سربلند باشید.

الف) ماتریس است چون A^{-1} معکوس آن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (منحصر به فرد)

$0 < (1 - 1) \quad R = \sqrt{2} \quad \sqrt{2} > 1$
 $0A = 1$

ب) حاصل

ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

د) صفر

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -8 & -4 & 11 \\ -10 & -11 & -7 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

۲- الف)

$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}$

ب)

$B^T + I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 11 & 8 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix}$

$m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \quad m = n \rightarrow n = 2$

۴- الف)

بر حسب سطر اول

ب)

$-1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times (2 - 0) - 2 \times (0) + 3 \times (0 + 1) = 1$

$$\begin{cases} rx - y = f \\ vx + ry = 10 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} r & -1 \\ v & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 10 \end{bmatrix}$$

-2

$$|A| = 1 - v = 1 \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} r & -1 \\ -v & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -1 \\ -v & r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r & -1 \\ -v & r \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} r & -1 \\ v & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r & -1 \\ -v & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = f \\ y = r \end{cases}$$

$$rx - 4y + f = 0$$

$$0H = R$$

$$0(1, 2, -r)$$

-4



$$OH = \frac{|1 + r + f|}{\sqrt{f^2 + 4r}} = \frac{r \varepsilon}{\sqrt{\Delta r}} = \frac{r \gamma}{\sqrt{1r}} = \frac{r \sqrt{1r}}{1r}$$

$$\text{optimal} \rightarrow (x-1)^2 + (y+r)^2 = \frac{1r^2}{1r}$$

$$rx + y^2 - rx = 1^2 \quad rx - 4y = 0$$

-6

$$0(1, 2, 0) \quad R = 2$$

$$\text{Lagrange Multiplier} = \frac{|f|}{\sqrt{f^2 + 4r}} = \frac{r \sqrt{1r}}{1r}$$

$$\frac{r \sqrt{1r}}{1r} < r$$

abgleich

$$rx + y^2 - rx = 1 \quad 0_1(1, 2, 0) \quad R_1 = 9$$

-1

$$rx + y^2 = 4 \quad 0_2(0, 2, 0) \quad R_2 = 2$$

$$0 \text{ oder } 1$$

$$0 \text{ oder } < R_1 - R_2 \rightarrow \text{abgleich}$$



$$rx + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

$$0(1, 2, 2) \quad H(1, 2, 2) \quad \text{MOH} = \frac{r-2}{r-2} = 2$$

$$\text{MOH} \times \text{optimal} = -1 \rightarrow \text{optimal} = -\frac{1}{r}$$

$$\text{optimal} \rightarrow (y-2) = -\frac{1}{r}(x-2)$$

$$a + b - fC > 0 \rightarrow (12)' + (14)' - fK > 0$$

-10

$$f_{00} - fK > 0 \quad 100 > k$$

$$y^r - \epsilon y - 14y + 11 = 0$$

(11) - 11

$$y^r - \epsilon y + 11 = 0 \quad y^r - \epsilon y + 100 - 100 + 11 = 0 \quad (y-100)^r - 11^r = 0 \quad (y-100)^r \leq 11^r$$

(12)

$$U_1'(y, 100)$$

$$U_2'(y, 100)$$

$$U_3'(y, 100)$$

$$y^r + an + \epsilon = 0 \quad y^r - an - \epsilon \quad F\left(-\frac{an}{\epsilon}, 100\right)$$

$$n^r + y^r \leq \epsilon y$$

-11

$$\Rightarrow n^r - an - \epsilon = \epsilon y \quad n^r - an - \epsilon = 0 \quad \begin{cases} \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} \\ \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \checkmark$$

$$y^r = -\Delta \left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} \right) - \epsilon = \frac{-\Delta + \Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} - \epsilon = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} - \epsilon$$

$$\left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a}, \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} \right), \left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a}, \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$x^2 = 14y + 14$$

$$x^2 = 14(y+1)$$

$$ka=14 \rightarrow a=7$$

- 11*

$$U_1 (0, 7)$$

$$U_2 (0, -1)$$

$$|a| = \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2} = \sqrt{29}$$

(الف) - 12



(ب)

$$a = (2, 0 - k) \quad b = (1, 0 - 1)$$

- 13

$$a \cdot b = (2 + 0 - k) = |a||b| \cos \Delta = \sqrt{\Delta + k^2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 - k = \sqrt{\Delta + k^2} \xrightarrow{\text{مربع}} k^2 + \Delta - \Delta - k = \Delta + k^2 \quad -\Delta - k = 1 \quad k = -\frac{1}{\Delta}$$

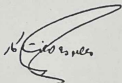
14 - آمد و بردار بردار دیکری و دبا سینه الفرب و لغات الفرب الفرب

$$a \cdot b = -n + 2n + 1 - 2 = 0$$

$$3n - 2 = 0$$

$$3n = 2$$

$$n = \frac{2}{3}$$



۱- الف) منحصراً فرر ب) داخل ج) یک د) صفر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad - 2$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & 10 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \\ -13 & -11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad - 3 \quad \text{الف}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$B^2 + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 6 & 13 & 8 \\ 7 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

۴- الف) درایم‌هاک واقع بر قطر یک ماتریس اسکالر برابر یکدیگرند و درایم‌هاک غیر واقع

بر قطر اصلی چنین ماتریس برابر صفر هستند و پس داریم :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m-2 = 0 \Rightarrow m=2 \\ m=n \xrightarrow{m=2} n=2 \end{cases}$$

ب) با استفاده از بسط بر حسب سطر دوم ماتریس داریم :

$$|A| = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2 \times 4 - 1 \times 7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \quad - 5$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

۶ - فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره ۵ برابر اندازه شعاع دایره است.

$$R = \frac{|4(2) - 6(-2) + 4|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{24}{2\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

معادله دایره: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{144}{13}$

۷ - فاصله مرکز دایره از خط و نیز اندازه شعاع دایره را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$$

شعاع دایره: $R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 - 4(-4)} = 2$
 مرکز دایره: $O(1, 0)$

فاصله مرکز دایره از خط: $d = \frac{|4(1) - 6(0)|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

خط دایره در نقطه تلاقی واقع می‌کنند $\Rightarrow d < R \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}} < 2$

۸ - $C: x^2 + y^2 - 2x - 10 = 0$

شعاع: $R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 - 4(-10)} = 9$
 مرکز: $O(1, 0)$

$C': x^2 + y^2 = 4$

شعاع: $R' = 2$
 مرکز: $O'(0, 0)$

$$OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$$

دو دایره متداخل اند $\Rightarrow OO' < |R - R'| \Rightarrow 1 < 9 - 2$

۹ - خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است.

اگر مرکز دایره را با O و خط مماس را با d نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow O(2, 2)$$

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4-2}{3-2} = 2 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{2}$$

معادله خط مماس: $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = -x + 3$
 $\Rightarrow x + 2y = 11$

$$\text{شبه دایره بودن: } a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow (-12)^2 + 16^2 - 4k > 0 \quad -10$$

$$\Rightarrow 144 + 256 > 4k \Rightarrow 4k < 400 \Rightarrow k < 100$$

$$y^2 - 4y - 12x + 18 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 12x - 18 \quad (11 - الف)$$

$$\xrightarrow{+4} y^2 - 4y + 4 = 12x - 14 \Rightarrow (y-2)^2 = 12\left(x - \frac{7}{3}\right)$$

$$4a = 4 \Rightarrow \text{فاصله کانونی: } a = 1$$

$$\text{رأس: } A\left(\frac{7}{3}, 2\right) \quad (ب)$$

سهی رو به راست باز می شود، بنابراین داریم:

$$\text{کانون: } F(h+a, k) = \left(\frac{7}{3} + 1, 2\right) = \left(\frac{10}{3}, 2\right)$$

$$\text{خطوط: } x = h - a = \frac{7}{3} - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \quad -12$$

$$y^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow 36 - x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 39 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(-39) = 181 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{181}}{2}$$

چون نقطه رأس سهی است و سهی رو به چپ باز می شود، پس تنها

مقدار $x = \frac{5 - \sqrt{181}}{2}$ قابل قبول است.

$$y^2 = 36 - \left(\frac{5 - \sqrt{181}}{2}\right)^2 = 36 - \frac{25 - 10\sqrt{181} + 181}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{10\sqrt{181} - 42}{4}$$

$$x^2 - 8 = 16y + 8 \Rightarrow x^2 = 16y + 16 \quad -13$$

$$\Rightarrow x^2 = 16(y+1)$$

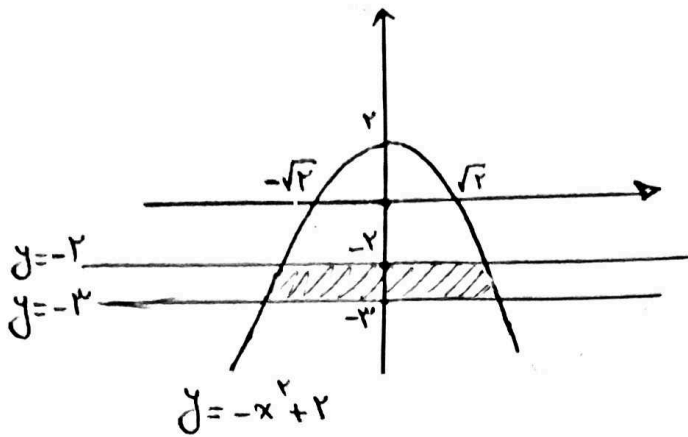
$$\text{رأس: } A(0, -1) \quad , \quad 4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

سهی رو به بالا باز می شود، پس داریم:

$$\text{کانون: } F(h, k+a) = (0, -1+4) \Rightarrow F(0, 3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = \sqrt{3r}$$

۱۴ - الف)



ب) ناحیه هاشور خورده در شکل،
معادل رابطه دایره شده است.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r + 0 - k}{\sqrt{r^2 + 1 + k^2} \times \sqrt{1 + 0 + 1}} \quad - ۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r - k}{\sqrt{\omega + k^2} \times \sqrt{r}} \Rightarrow r \sqrt{\omega + k^2} = r(r - k)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega + k^2} = r - k \xrightarrow{r \text{ را ضرب کنیم}} \omega + k^2 = r^2 - 2rk + k^2$$

$$\Rightarrow rk = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{r}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow n + 2n + 1 - k = 0 \quad - ۱۶$$

$$\Rightarrow 3n = r \Rightarrow n = \frac{r}{3}$$