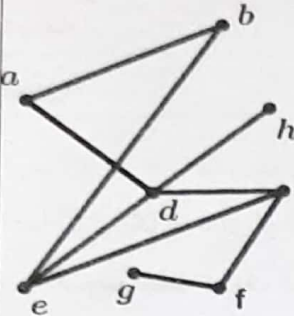
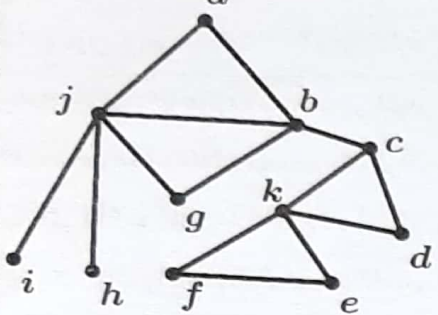
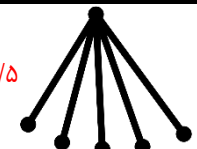
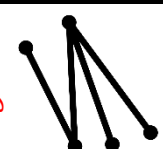
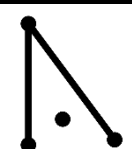


نام و نام خانوادگی:	امتحان شبه‌نهایی ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
نام مدرسه:	نوبت دوم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شهرستان:	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد.	تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۸

۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $\alpha$ یک عدد گویا و $\beta$ گنگ باشد، $3\alpha + \beta$ همواره گنگ است. ب) مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف تهی، مینیمال است. ج) اگر $n$ عددی صحیح باشد آنگاه $3 n^3 - n$ . د) دو مربع لاتین متعامد $6 \times 6$ وجود دارد.	۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یک گراف کامل، ..... عضو دارد. ب) اگر $a$ و $d = (-2, a)$ آن‌گاه $d$ برابر ..... است. ج) یک گراف را ناهمبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک ..... وجود داشته باشد. د) تعداد حالات انتخاب ۵ شاخه گل از بین سه نوع گل طوری که از هر نوع، حداقل یک شاخه داشته باشیم برابر ..... است.	۱
۱/۵	در سؤالات زیر گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف) باقیماندهٔ تقسیم اعداد $a$ و $b$ بر ۱۷ به ترتیب ۲ و ۱۱ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3a - 5b$ را بر ۱۷ کدام است؟ ۱) ۴      ۲) ۳      ۳) ۲      ۴) ۱ ب) عدد احاطه‌گری گراف $G$ از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۴۰ کدام است؟ ۱) ۳      ۲) ۲      ۳) حداقل یک است      ۴) ۱ ج) معادلهٔ $21x + 35y = 2n + 1$ به ازای کدام عدد طبیعی $n$ ، در $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟ ۱) ۱۸      ۲) ۲۴      ۳) ۲۵      ۴) ۱۳	۱/۵
۱	برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی $a, b$ ثابت کنید: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{3ab}$	۱
۱	برای هر یک مثال نقض بیاورید. الف) اگر $x$ گنگ باشد آنگاه $x^2 + 6x + 5$ نیز گنگ است. ب) تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف $k$ -منتظم از مرتبه $n$ برابر $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ می‌باشد.	۱
۱	اگر $a \equiv b$ و $c \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید $a + c \equiv b + c$	۱
۱	معادلهٔ $3x + 5y = 121$ را در $\mathbb{Z}$ حل کنید.	۱
۱/۵	رقم یکان $5 - 3^{1399}$ را بیابید.	۱/۵
۱/۵	در هر مورد، گرافی با مشخصات خواسته شده رسم کنید. الف) مرتبهٔ ۶ با حداقل یال و عدد احاطه‌گری آن یک باشد. ب) همبند، بدون دور از مرتبهٔ ۵ که در آن $\Delta = 3$ باشد. ج) ۴ رأسی که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱/۵

۲	 <p>با توجه به گراف <math>G</math>، به سوالات زیر پاسخ دهید. (محاسبات لازم است)</p> <p>الف) <math>\Delta(G) =</math>      <math>\delta(G) =</math>      <math>\deg(c) =</math></p> <p>ب) دوری به طول ۴ بنویسید.</p> <p>ج) حداقل چند یال دیگر به این گراف اضافه کنیم تا گراف ۵-منتظم از همین مرتبه بدست آید؟</p> <p>د) اگر <math>N_G(x) = \{b, d, c\}</math>، آنگاه <math>x</math> کدام رأس است؟</p>	۱۰																																
۱/۵	 <p>با توجه به گراف مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) کران پایین عدد احاطه گری را بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی بنویسید.</p> <p>ج) یک ۷-مجموعه بنویسید. آیا این مجموعه یکتاست؟</p>	۱۱																																
۱	<p>۶ دانش آموز و ۵ معلم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف برای گرفتن عکس قرار بگیرند به طوری که:</p> <p>الف) همه معلم ها کنار هم قرار گیرند.</p> <p>ب) دانش آموزان یک در میان بین معلم ها قرار بگیرند.</p>	۱۲																																
۱	<p>شش توپ فوتبال یکسان، سه توپ والیبال یکسان و یک توپ بسکتبال را به چند طریق می توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد طوری که هر کدام یک توپ داشته باشند؟</p>	۱۳																																
۲	<p>تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله <math>x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 21</math> را با شرایط <math>x_1 &gt; 1</math> و <math>x_2 \geq 3</math> بدست آورید.</p>	۱۴																																
۲	<p>دو مربع لاتین <math>A</math> و <math>B</math> را در نظر بگیرید:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>A =</math> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <math>B =</math> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> </div> <p>الف) آیا <math>A</math> و <math>B</math> متعامدند؟ چرا؟</p> <p>ب) یک مربع لاتین مانند <math>C</math> به گونه ای بنویسید که <math>A</math> و <math>C</math> متعامد باشند. (<math>B \neq C</math>) روش کار را توضیح دهید.</p>	۳	۴	۱	۲	۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۱۵
۳	۴	۱	۲																															
۴	۳	۲	۱																															
۱	۲	۳	۴																															
۲	۱	۴	۳																															
۳	۴	۱	۲																															
۱	۲	۳	۴																															
۲	۱	۴	۳																															
۴	۳	۲	۱																															

ردیف	راهنمای آزمون	نمره
۱	الف) درست ۰/۲۵ (ب) درست ۰/۲۵ (ج) درست ۰/۲۵ (د) نادرست ۰/۲۵	۱
۲	الف) یک ۰/۲۵ (ب) ۲ ۰/۲۵ (ج) مسیر ۰/۲۵ (د) $\binom{4}{2} = 6$ ۰/۲۵	۱
۳	الف) گزینه ۳ ۰/۵ (ب) گزینه ۴ ۰/۵ (ج) گزینه ۲ ۰/۵	۱/۵
۴	الف) $\frac{a+3b}{2} \geq \sqrt{3ab} \Leftrightarrow a+3b \geq 2\sqrt{3ab} \Leftrightarrow a+3b-2\sqrt{3ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{3b})^2 \geq 0$ گزاره همیشه درست ۰/۲۵	۱
۵	الف) اگر $x = \sqrt{2} - 3 \in \mathbb{Q}$ آنگاه $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4 = (\sqrt{2}-3+3)^2 - 4 = 0$ ۰/۲۵ ب) در گراف مقابل عدد احاطه گری ۴ است در صورتی که $\lfloor \frac{8}{k+1} \rfloor = \lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 3 \neq 4$ ۰/۲۵	۱
۶	$a \equiv b \Rightarrow m a-b \Rightarrow m a+c-c-b \Rightarrow m (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \equiv b+c$ ۰/۲۵	۱
۷	$3x \equiv 121 \Rightarrow 6x \equiv 242 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = 23 - 3k$ و $k \in \mathbb{Z}$ ۰/۲۵	۱
۸	پس رقم یکان ۲ می باشد. $3^2 \equiv 1 \Rightarrow (3^2)^{699} \equiv 1 \Rightarrow 3^{1398} \equiv 1 \Rightarrow 3^{1399} \equiv 3 \Rightarrow 3^{1399} - 5 \equiv -2 \Rightarrow 3^{1399} - 5 \equiv 2$ ۰/۲۵	۱/۵
۹	الف)  ۰/۵ ب)  ۰/۵ ج)  ۰/۵	۱/۵
۱۰	الف) $\Delta(G) = 4$ ۰/۲۵ $\delta(G) = 1$ ۰/۲۵ $\deg(c) = 3$ ۰/۲۵ ب) $abeda$ ۰/۲۵ ج) $pr = 2q \Rightarrow 8 \times 5 = 2q \Rightarrow q = 20$ ۰/۲۵ د) $x = e$ ۰/۲۵	۲
۱۱	الف) $\lfloor \frac{11}{5+1} \rfloor = 2$ ۰/۵ ب) $\{i, h, a, g, c, e\}$ ۰/۵ ج) $\{j, k\}$ بله یکتاست. ۰/۵	۱/۵
۱۲	الف) $5! \times 7!$ ۰/۵ ب) $5! \times 6!$ ۰/۵	۱
۱۳	$\frac{10!}{3! \times 6!} = 84$ ۰/۲۵	۱
۱۴	$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$	۲

نمره	راهنمای آزمون	ردیف																
	$x_r \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_r = 3 \Rightarrow y_1 + 2 + 12 + x_r + x_f = 21 \Rightarrow y_1 + x_r + x_f = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = 36 \quad +/5 \\ x_r = 4 \Rightarrow y_1 + 2 + 16 + x_r + x_f = 21 \Rightarrow y_1 + x_r + x_f = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10 \quad +/5 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">تعداد جواب ها = <math>36 + 10 = 46</math> <span style="float: right;">+/5</span></p>																	
۲	<p>الف) بله متعامدند. زیرا برای دو عدد مثل هم از A، درآیه های نظیر از B مساوی نیستند. <span style="float: right;">+/25</span></p> <p>ب) طبق مثال صفحه ۶۴ کتاب هر جایگشت از B یک مربع لاتین متعامد با A می سازد پس مثلاً جایگشت زیر را اعمال می کنیم تا مربع لاتین C ساخته شود. <span style="float: right;">+/5</span></p> <p style="text-align: center;"> <math>4 \rightarrow 1 \qquad 3 \rightarrow 4 \qquad 2 \rightarrow 3 \qquad 1 - 2</math> </p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <math>C =</math> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin: 0 10px;"> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> <span style="float: right;">+/75</span> </div>	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۱۵
۴	۱	۲	۳															
۲	۳	۴	۱															
۳	۲	۱	۴															
۱	۴	۳	۲															
۲۰	موفقیت شما آرزوی ماست																	