باسمه تعالی

سوال امتحان راه نهایی درس: حسابان(۲)	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد سوال: ۱۸	تعداد صفحه: ۲
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
آزمون هماهنگ راه نهایی دانش آموزان پایه دوازدهم مدارس دولتی و غیردولتی استان مازندران		معاونت آموزش متوسطه استان مازندران http://motvasete-mazand.medu.ir	

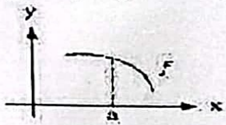
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد.	نمره

۱ — درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (نمره: ۱)

الف) برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است نمودار تابع f را ۱ واحد به راست منتقل و سپس طول نقاط را نصف کنیم. د☐ ن☐

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ آنگاه $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$ د☐ ن☐

ج) تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و خط $x=0$ مماس قائم منحنی است. د☐ ن☐



د) با توجه به نمودار تابع f داریم: $f''(a)>0$ د☐ ن☐

۲ — جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (نمره: ۱)

الف) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1,3]$ باشد، دامنه تابع $f(x+1)$ برابر ...... است.

ب) اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، آنگاه ...... $=\lim_{x\to\pm\infty} x^n$

ج) اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$ و $f(1)=3$ باشد، آنگاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}$ برابر .... است.

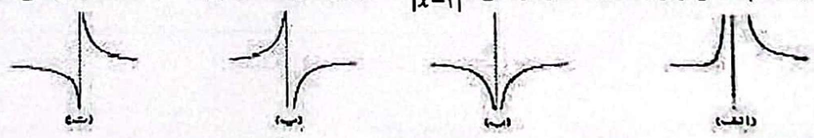
د) معادله مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x+2}{x^2+x-2}$ برابر .... است.

۳ — در سوالات چهار گزینه‌ای زیر گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید. (نمره: ۱)

الف) اگر $(g+f)(2)=5$ و $g(2)=4$ و $g'(2)=3$ و $f'(2)=-1$ باشد، حاصل $(gf-3f)'(2)$ کدام است؟

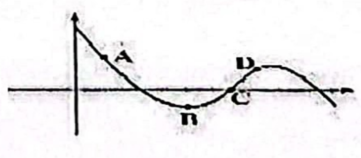
۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۲-

ب) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $y=\frac{-x+1}{|x-2|}$ را در همسایگی $x=2$ نمایش می دهد؟



۱) (الف) ۲) (ب) ۳) (پ) ۴) (ت)

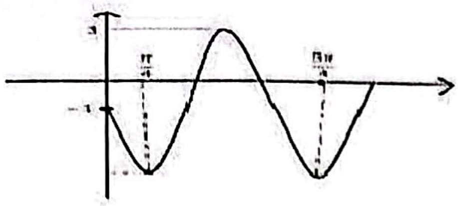
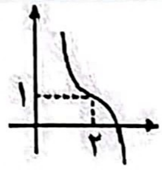
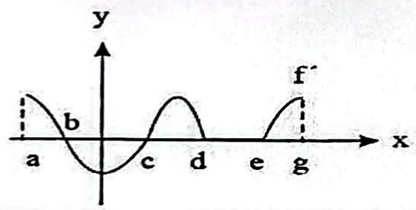
۴ — نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یکی از نقاط اضافی است) (نمره: ۰/۷۵)



شیب	۱	$\frac{1}{2}$	۲-
نقطه			

۵ — اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)=x^3+ax^2+x-3$ بر $x-1$ برابر ۵ باشد، مقدار a را بدست آورید. (نمره: ۱)

۶ — اگر $\log_{0/1}(x+1)\ge\log_{0/1}(2x-1)$ باشد، آنگاه حدود x را به دست آورید (نمره: ۱)

۷	معادله داده شده را حل کنید. $\cos 2x - \sin x = 0$	۰/۷۵
۸	معادله نمودار تابع مثلثاتی مقابل را بنویسید. 	۱/۲۵
۹	اگر نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-2}{f(x)-1}$ را بنویسید.  	۰/۵
۱۰	حاصل $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را بدست آورید.	۰/۷۵
۱۱	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \tan(\sqrt[2]{x} + 2x)$ ب) $y = \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x+5}}$	۱/۵
۱۳	اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$، آنگاه معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=(gof)(x)$ را در نقطهٔ $A(4,\dfrac{1}{2})$ بنویسید.	۱
۱۴	در تابع با ضابطه $f(x)=x^2-1$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[2, 2+a]$ برابر آهنگ لحظه ای تغییر در $x=4$ است. مقدار a را بدست آورید.	۱/۲۵
۱۵	در کره‌ای به شعاع $R=2$ استوانه ای محاط کرده ایم، ارتفاع استوانه را طوری بیابید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. (شعاع قاعده استوانه را r و ارتفاع آن را h فرض کنید)	۱
۱۶	با توجه به نمودار تابع f' به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) نقطه‌ای که در آن تابع f مینیمم نسبی دارد؟ چرا؟ ب) نقطه‌ای که در آن تابع f ماکزیمم نسبی دارد؟ چرا؟ ج) نقاط بحرانی تابع f را در صورت وجود بنویسید.  	۱/۵
۱۷	مقادیر a و b را طوری بدست آورید که نقطه‌ی $(1, -1)$ نقطه عطف تابع $y=ax^3+bx^2+1$ باشد.	۱/۵
۱۸	جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x}{x-4}$ را رسم کنید.	۲
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۲۰

حسابان ۳

۱) الف) درست

ب) درست

ج) درست

د) نادرست

---

۲) الف) $[-2,2]$

ب) $+\infty$

ج) ۳

د) $x=1$

---

۳) الف) درجه ۳

ب) درجه ۲

---

۴)

نقطه	C	D	A
شیب	۱	$\frac{1}{2}$	۲-

---

۵) $f(1)=5 \to 1+a+1-3=5 \to a-1=5 \to \boxed{a=6}$

$x-1=0 \quad \boxed{x=1}$

---

۶) $x+1 \leq 2x-1$ ← تابع نزولی است

$\boxed{2 \leq x}$

۱۰ ۱. ۱...

۷)

$\cos 2x - \sin x = 0$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(2) = 9$

$\sin x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \xrightarrow{\sin} \; x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$

---

۸)

$\max = 3 \rightarrow a = 4 \rightarrow \min = -5$

$c = -1$

---

۹)

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-2}{F(x)-1} = \dfrac{-2}{1^+ - 1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 1$

---

۱۱)

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 3$

$f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x - 1 - 2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x - 3}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3$

$F(1) = 1 + 1 = 2$

مشتق پذیر میباشد.

(۱۰

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = +\infty + 1 \boxed{= +\infty}$$

۱۲)

الف) $y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)\left(1 + \tan^2(\sqrt{x} + 2x)\right)$

ب) $y' = \dfrac{\dfrac{3(2x+5) - 2(3x+1)}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x+5}}}$

---

۱۳)

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$y = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$A(4, \frac{1}{2}) \longrightarrow y' = \dfrac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot x}$

$y'(4) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4} \times 4} = \boxed{-\dfrac{1}{16}} = m$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}(x - 4)}$$

---

۱۴)

$f(x) = x^2 - 1$ آهنگ لحظه‌ای = آهنگ متوسط $= f'(4) = 8$

$[2, 2+a]$

$f'(x) = 2x \longrightarrow \boxed{f'(4) = 2(4) = 8}$

آهنگ متوسط $= \dfrac{f(2+a) - f(2)}{2+a-2} = \dfrac{(2+a)^2 - 1 - (2^2 - 1)}{a} = \dfrac{(2+a)^2 - 4}{a} = 8$

$(2+a)^2 - 4 = 8a$

$\cancel{4} + 4a + a^2 - \cancel{4} = 8a$

$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a(a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ a = 4 \ \checkmark \end{cases}$

۱۵)

$h = ?$

$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 2^2 \rightarrow \boxed{4r^2 + h^2 = 16} \rightarrow r^2 = \frac{16 - h^2}{4}$

$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 . h =$

$V = \pi\left(\frac{16 - h^2}{4}\right).h = 8\pi h - \pi\frac{h^3}{4}$

$V' = 8\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \rightarrow \frac{3\pi}{4}h^2 = 8\pi$

$h^2 = \frac{4\times 8}{3} = \frac{32}{3} \qquad h = \sqrt{\frac{32}{3}}$ ✓

---

۱۶) الف) نقطه c

زیرا مشتق در نقطه c صفر شده است. و مقدار مشتق قبل از نقطه c منفی و بعد از مثبت شده است یعنی

x		c	
y'	$-$	0	$+$
	↘	min نسبی	↗

ب) نقطه b

x		b	
y'	$+$	0	$-$
y	↗	max نسبی	↘

ج) نقاط a , b , c , d , e , و

(۱۷

$(1,-1)$

عطف

$y = ax^3 + bx^2 + 1$

$-1 = a + b + 1 \rightarrow \boxed{a + b = -2}$

$y' = 3ax^2 + 2bx \rightarrow \cancel{3a+2b=0}$

$y'' = 6ax + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \boxed{b = -3a}$

$a - 3a = -2$

$\boxed{a = 1}$

$\boxed{b = -3}$

(۱۸

$y = \dfrac{x}{x-4}$ $\quad \boxed{x = 0}$ $\quad$ ریشه

$y = 0$

$x - 4 = 0 \quad x = 4$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-4} = 1 \rightarrow y = 1$ مجانب افقی

$y' = \dfrac{(x-4) - x}{(x-4)^2} = \dfrac{-4}{(x-4)^2} \rightarrow x = 4$ مجانب قائم $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$x = 4$

$y'' = \dfrac{+4(2)(x-4)}{(x-4)^4} = \dfrac{8}{(x-4)^3}$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y''		$-$		$+$	
y	1	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	1