

باسمه تعالی											
سوال امتحان راه نهایی درس: ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	تعداد سوال: ۱۸	تعداد صفحه: ۲								
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه								
آزمون هماهنگ راه نهایی دانش آموزان پایه دوازدهم مدارس دولتی و غیردولتی استان مازندران		معاونت آموزش متوسطه استان مازندران <a href="http://motvasete-mazand.medu.ir">http://motvasete-mazand.medu.ir</a>									
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد.	نمره									
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای رسم نمودار تابع <math>y = f(2x - 1)</math> از روی نمودار تابع <math>y = f(x)</math> کافی است نمودار تابع <math>f</math> را ۱ واحد به راست منتقل و سپس طول نقاط را نصف کنیم.</p> <p>ب) تابع <math>f(x) = x^2 x </math> در بازه <math>(-\infty, 0)</math> اکیداً صعودی است.</p> <p>ج) تابع <math>y = \sqrt{x}</math> در <math>x = 0</math> مشتق پذیر نیست و خط <math>x = 0</math> مماس قائم منحنی است.</p> <p>د) دو تابع <math>g(x) = -\frac{2x+7}{x}</math> و <math>f(x) = \frac{7}{x}x - 3</math> وارون یکدیگرند.</p> <p>ه) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع <math>r</math> که بر دایره <math>C(O, r)</math> در صفحه‌ی این دایره مماس خارج‌اند، دایره <math>C(O, 2r)</math> است.</p>	۱/۲۵	<input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د								
۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) اگر دامنه تابع <math>f(x)</math> برابر <math>[-1, 3]</math> باشد دامنه تابع <math>f(x+1)</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر <math>n</math> عددی طبیعی و زوج باشد آنگاه <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \dots</math></p> <p>ج) اگر <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4</math> و <math>f(1) = 3</math> باشد آنگاه <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}</math> برابر ..... است.</p> <p>د) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک ..... روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.</p> <p>ه) اگر صفحه‌ی <math>p</math> بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است.</p>	۱/۲۵									
۳	<p>در سوالات چهار گزینه‌ای زیر گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>الف) اگر <math>(g+f)(2) = 5</math> و <math>g(2) = 4</math> و <math>g'(2) = 3</math> و <math>f'(2) = -1</math> باشد حاصل <math>(gf - 3f)'(2)</math> کدام است؟</p> <p style="text-align: center;">-۴ (۱)      ۴ (۲)      ۲ (۳)      -۲ (۴)</p> <p>ب) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع <math>y = \frac{-x+1}{ x-2 }</math> را در همسایگی <math>x = 2</math> نمایش می‌دهد؟</p> <p style="text-align: center;"> </p> <p style="text-align: center;">(الف) (۱)      (ب) (۲)      (پ) (۳)      (ت) (۴)</p> <p>ج) تابع <math>y = f(x)</math> با دامنه <math>R</math> هم صعودی و هم نزولی است. اگر این تابع از نقطه <math>(2, 5)</math> بگذرد، حاصل <math>\frac{2f(1)+f(-1)}{3}</math> کدام است؟</p> <p style="text-align: center;">۵ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      <math>\frac{1}{3}</math> (۴)</p>	۱/۵									
۴	<p>نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یکی از نقاط اضافی است)</p>	۰/۷۵	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>شیب</td> <td>۱</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	شیب	۱	$\frac{1}{2}$	-۲	نقطه			
شیب	۱	$\frac{1}{2}$	-۲								
نقطه											
۵	معادله داده شده را حل کنید.	۰/۷۵	$\cos 2x - \sin x = 0$								

۱/۲۵		۶	معادله نمودار تابع مثلثاتی مقابل را بنویسید.
۱/۲۵		۷	<p>به سوالات حدی زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) اگر نمودار تابع <math>f</math> به صورت روبه‌رو باشد، حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{f(x)-1}</math> را بنویسید.</p> <p>ب) هرگاه <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^4+bx^3+cx^2}{2x^2+x^2-1}</math> برابر ۲ باشد، مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> را تعیین کنید.</p>
۱		۸	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
۰/۷۵		۹	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)
۱/۲۵		۱۰	اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، آنگاه معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = (g \circ f)(x)$ را در نقطه $A(4, \frac{1}{4})$ بنویسید.
۰/۷۵		۱۱	در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 1$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[2, 2+a]$ برابر آهنگ لحظه ای تغییر در $x = 4$ است. مقدار $a$ را بدست آورید.
۱		۱۲	در کره ای به شعاع $R = 2$ استوانه ای محاط کرده ایم، ارتفاع استوانه را طوری بیابید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. (شعاع قاعده استوانه را ۳ و ارتفاع آن را $h$ فرض کنید)
۱/۵		۱۳	<p>با توجه به نمودار تابع <math>f'</math> به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) نقطه ای که در آن تابع <math>f</math> مینیمم نسبی دارد؟ چرا؟</p> <p>ب) نقطه ای که در آن تابع <math>f</math> ماکزیمم نسبی دارد؟ چرا؟</p> <p>ج) نقاط بحرانی تابع <math>f</math> را در صورت وجود بنویسید.</p>
۱		۱۴	مقادیر $b$ و $d$ را طوری بدست آورید که نقطه $(1, 2)$ نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + d$ باشد.
۱		۱۵	خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{7}{5}$ و اندازه قطر بزرگ آن برابر ۱۰ است. طول قطر کوچک بیضی و فاصله کانون‌های آن را بیابید.
۱		۱۶	دو نقطه $A$ و $B$ روی یک بیضی $F$ و $F'$ کانون‌های بیضی‌اند. باتوجه به شکل اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید مثلث $FMF'$ متساوی الساقین است.
۱		۱۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس بیرونی باشد.
۱/۷۵		۱۸	<p>به سوالات احتمال زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) دو ظرف یکسان داریم، ظرف اول شامل ۶ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۷ مهره‌ی آبی است. از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟</p> <p>ب) اگر <math>p(A) = 0/3</math> و <math>p(B) = 0/4</math> و <math>p(E A) = 0/1</math> و <math>p(E B) = 0/8</math> باشد حاصل <math>p(E)</math> را محاسبه کنید.</p>
۲۰	جمع نمره		موفق و سربلند باشید.

رياضی ۳

۱) الف) درست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

ه) درست

---

۲) الف)  $[-2, 2]$

ب)  $+\infty$

ج) ۴

د)

ه) دایره

---

۳) الف) مرتبه ۳

ب) مرتبه ۲

ج) مرتبه ۱

---

مشتق	۱	$\frac{1}{c}$	-۲
نقطه	C	D	A

۴)

$$c \cdot \sin \alpha - \sin \alpha = 0$$

$$1 - r \sin \alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow r \sin \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(r) = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{ca} = \frac{-1 - r}{r} = -1 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{ca} = \frac{-1 + r}{r} = \frac{1}{r} = \sin \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{f(x)-1} = \frac{-1}{1^+-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(لا) (الف)

ب

$$\lim \frac{ax^2 + bx^c + cx^2}{cx^2}$$

اعداد وتوابعها سحفت نسبيته

(ب) (ص)

$$f'(1)^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 \quad (\text{X})$$

$$f'(1)^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

سنتی بیرونی

(Q)

$$y = \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_{n+d}}}$$

$$\frac{r(r_{n+d}) - r(r_{n+1})}{(r_{n+d})^r}$$

y =

$$r \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_{n+d}}}$$

$$y = \frac{(r+n+0)^r}{r \sqrt{\frac{r+n+1}{r+n+0}}}$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

$$g(n) = \frac{1}{n}$$

$$y = g(f(n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(10)

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{r}\right) \rightarrow y' = \frac{0 - \frac{1}{r\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^r} = -\frac{1}{r\sqrt{x} \cdot x}$$

$$y'(x) = \frac{-1}{r\sqrt{x} \cdot x} = \boxed{-\frac{1}{14}} = m$$

$$y - \frac{1}{r} = -\frac{1}{14} (n - \varepsilon)$$

$$f(n) = n^r - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(n)h}{h} = f'(n) = \lambda$$

$$[r, r+a]$$

(11)

$$f'(n) = rn \rightarrow f'(x) = r(x) = \lambda$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+a) - f(r)}{r+a-r} = \frac{(r+a)^r - 1 - (r^r - 1)}{a} = \frac{(r+a)^r - r^r}{a} = \lambda$$

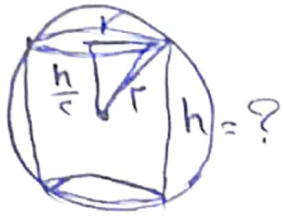
$$(r+a)^r - \varepsilon = \lambda a$$

$$r^r + \varepsilon a + a^r - r^r = \lambda a$$

$$a^r - \varepsilon a = 0 \rightarrow a(a - \varepsilon) = 0 \begin{cases} a = 0 \text{ (not possible)} \\ a = \varepsilon \checkmark \end{cases}$$

(12)





$$r + \left(\frac{h}{\epsilon}\right)^2 = r^2 \rightarrow r^2 + h^2 = 14$$

$$r^2 = \frac{14 - h^2}{\epsilon}$$

$$V = \pi r^2 \cdot h =$$

$$V = \pi \left(\frac{14 - h^2}{\epsilon}\right) \cdot h = \frac{14\pi h}{\epsilon} - \frac{\pi h^3}{\epsilon}$$

$$V' = 14\pi - \frac{3\pi}{\epsilon} h^2 = 0 \rightarrow \frac{3\pi}{\epsilon} h^2 = 14\pi$$

$$h^2 = \frac{14 \times \epsilon}{3} = \frac{32}{3} \quad h = \sqrt{\frac{32}{3}} \checkmark$$

نقطه C (الف) (۱۳)  
 زیرا مشتق در نقطه C منفی است. و مقدارش از مقدار قبلی کمتر است.

نقطه C مثبتی و عبارتی نسبتاً ساده است.

n	C
y'	- 0 +

↙ min ↘

n	b
y'	+ 0 -

↙ max ↘

(ب) نقطه b

(ج) نقاط a, b, c, d, e, g

$(r, 1)$

$(1, r)$

$$F(n) = r^n + b n^r + d$$

$$1 = r^1 + b(1)^r + d$$

$$r b + d = -1$$

$$r(-r) + d = -1$$

$$d = 0$$

$$F'(n) = r^n + r b n \rightarrow r(r) + r b(1) = 0$$

$$r + r b = 0$$

$$b = -1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r}{\delta} \rightarrow \frac{c}{\delta} = \frac{r}{\delta} \rightarrow c = r$$

(10)

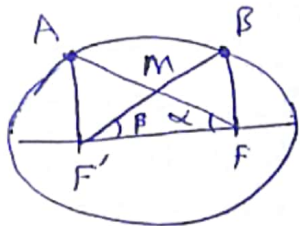
$$AA' = 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \delta^2 = b^2 + r^2 \quad b^2 = \delta^2 - r^2 = r^2$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{r^2}$$

$$b = \sqrt{r^2}$$

$$\text{قطر بزرگ} = 2c = 2(r) = \epsilon$$



(14)

در مثلث  
AFF' و BFF'

$$\left\{ \begin{array}{l} AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array} \right.$$

$$\angle FAF' = \angle FBF' \rightarrow \cancel{FA} + AF = \cancel{FB} + BF'$$

$$\rightarrow AF = BF'$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \leftarrow \text{در مثلث برابرند}$$

$$\Delta F'MF \rightarrow F'M = MF$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است

$$O(-1, 1)$$

(14)

$$\text{مثال} \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \rightarrow \begin{cases} O'(-\frac{1-r}{r}, -\frac{r}{r}) = (1, -1) \\ R' = \frac{\sqrt{(-r)^2 + r^2 - 4(1)}}{2} = \frac{\sqrt{1}}{r} = \sqrt{r} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1} = 2\sqrt{r}$$

$$\text{مثال} \rightarrow OO' = R + R' \rightarrow 2\sqrt{r} = \sqrt{r} + R \rightarrow R = \sqrt{r}$$

$$P(A) = P(G) \cdot P(A|G) + P(B) \cdot P(A|B)$$

(15)

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{13} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{13} = \frac{24}{130}$$

