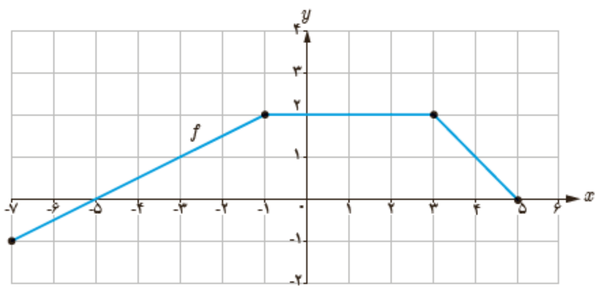
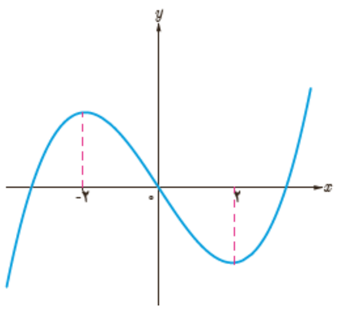
سؤالات امتحان شبیه ساز هماهنگ نهایی نوبت دوم درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع: ....**صبح**	پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	**نام و نام خانوادگی:**
رشته: **ریاضی و فیزیک**	مدت امتحان **۱۲۰** دقیقه	تاریخ امتحان **۱۴۰۲/۱/۲۹**	تعداد صفحه: **۲**
دانش آموزان پایه دوازدهم سال تحصیلی **۱۴۰۲-۱۴۰۱**			**آموزش و پرورش استان لرستان**

ردیف	استفاده از ماشین حساب بلامانع است	**نمره**
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر نقطه $(-۴,۱)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $(-۴,۳)$ روی نمودار تابع $y = -۳f(x)$ می‌باشد. ب) اگر تابع $y = f(x)$ در یک فاصله نزولی باشد، آنگاه اکیداً نزولی نیز خواهد بود. ج) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست. د) تابع اکیداً صعودی، نقطه عطف ندارد.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$ برابر با........ است. ب) اگر $f'(۲) = \frac{۱}{۲}$ و $g'(۲) = \frac{۳}{۲}$، در این صورت $(۳f + ۲g)'(۲)$ برابر با........ است. ج) اگر در یک منحنی مماس‌ها بالای منحنی باشند، در این صورت تقعر به سمت .... است. د) برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر........ است.	۱
۳	اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(۲x + ۱)$ را به کمک آن رسم کنید و دامنه تابع g را به دست آورید. 	۱
۴	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲, x \geq -۱ \\ ۲ \quad x < -۱ \end{cases}$ را رسم کنید، سپس بازه‌هایی که این تابع در آنها اکیداً صعودی و اکیداً نزولی است را مشخص کنید.	۰/۷۵
۵	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش پذیر باشد.	۱
	«ادامه سوالات در صفحه دوم»	

۶	معادله مثلثاتی $cos^{۲}x - sinx = \frac{۱}{۴}$ را در بازه $۰ \leq x \leq \pi$ حل کنید.	۱/۲۵
۷	حدهای زیر را حساب کنید. الف) $\lim_{x\to ۳^{+}} \frac{x+۱}{۹-x^{۲}}$ ب) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{-۳x^{۲}+x+۱}{۶x^{۳}-۲x+۱}$	۱/۵
۸	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{۱+۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۲۵
۹	معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^{۳} - \sqrt{x} + ۲$ را در نقطه $A(۱, F(۱))$ به دست آورید.	۱/۲۵
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = \sqrt{x}(۳x^{۲} + ۵)$ ب) $g(x) = \sin(۳x^{۲} + ۵) + cos^{۳}x$ ج) $h(x) = \frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$	۲/۵
۱۱	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^{۳}$ گرم است. الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $\mathrm{t} = ۳$ چقدر است؟	۱/۲۵
۱۲	نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = ۳x^{۲} - ۲x + ۵$ را در بازه $[-۲,۱]$ تعیین کنید.	۱/۵
۱۳	اگر $(۰,۰)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، مقادیر a، b و c را پیدا کنید. 	۱/۵
۱۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	۲
۱۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \lvert x^{۲} - ۱\rvert$ را در $x = ۱$ بررسی کنید.	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید. **جمع نمرات**	**۲۰**

۱

الف) نادرست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

۲

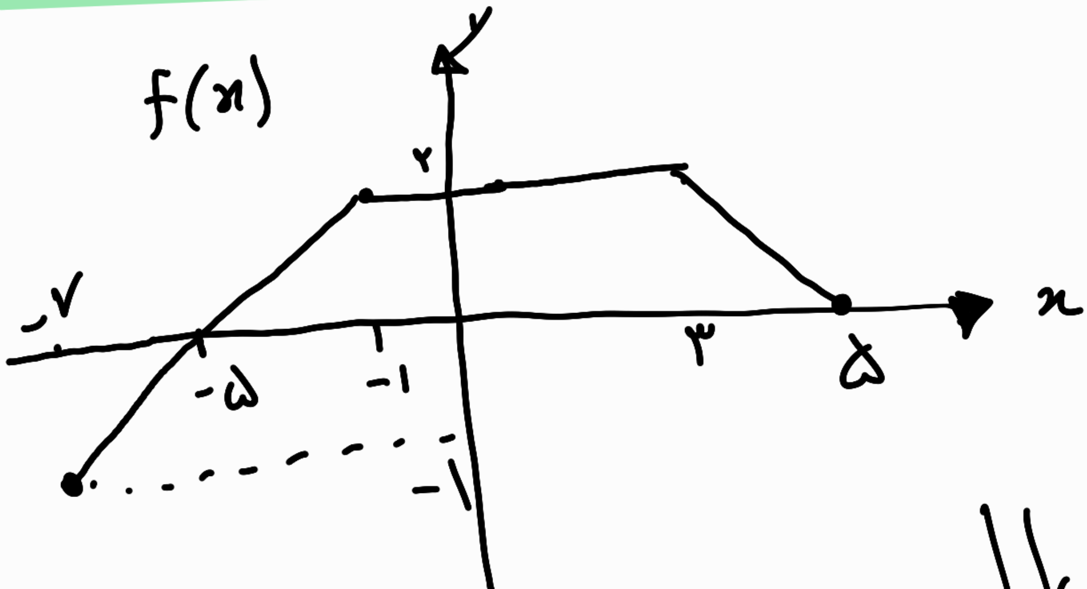
الف) ۴

ب) $\frac{۹}{۲}$

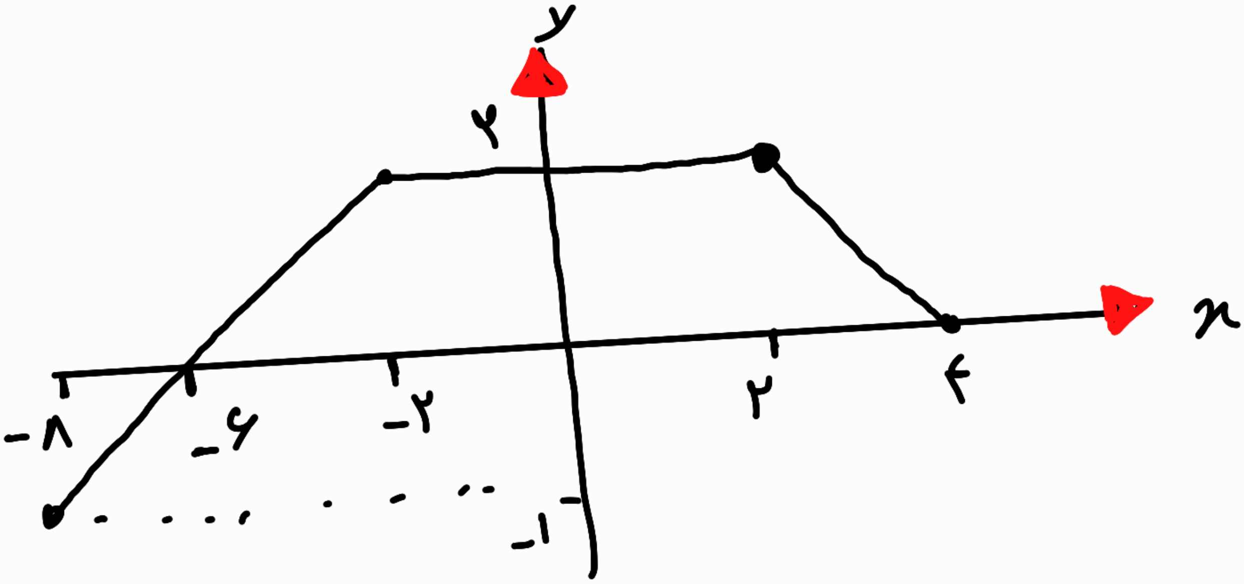
ج) پایین

د) $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی)

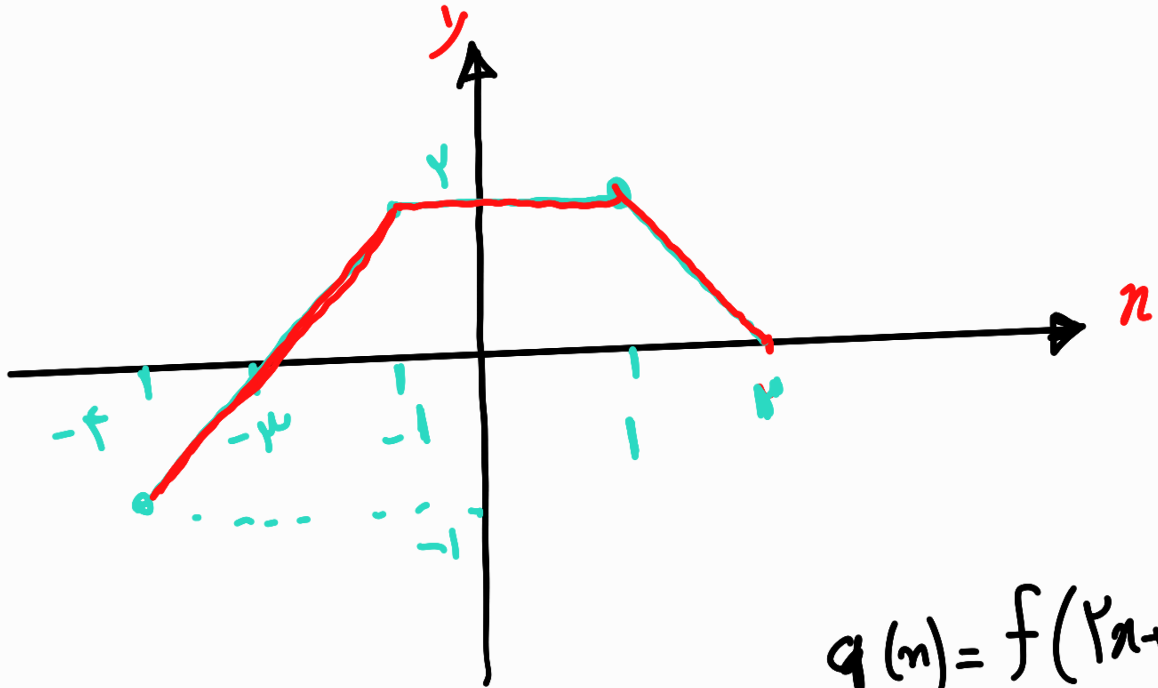
۳



پیدا کردن دامنه و برد ⇓



طول نقاط تقسیم بر ۲

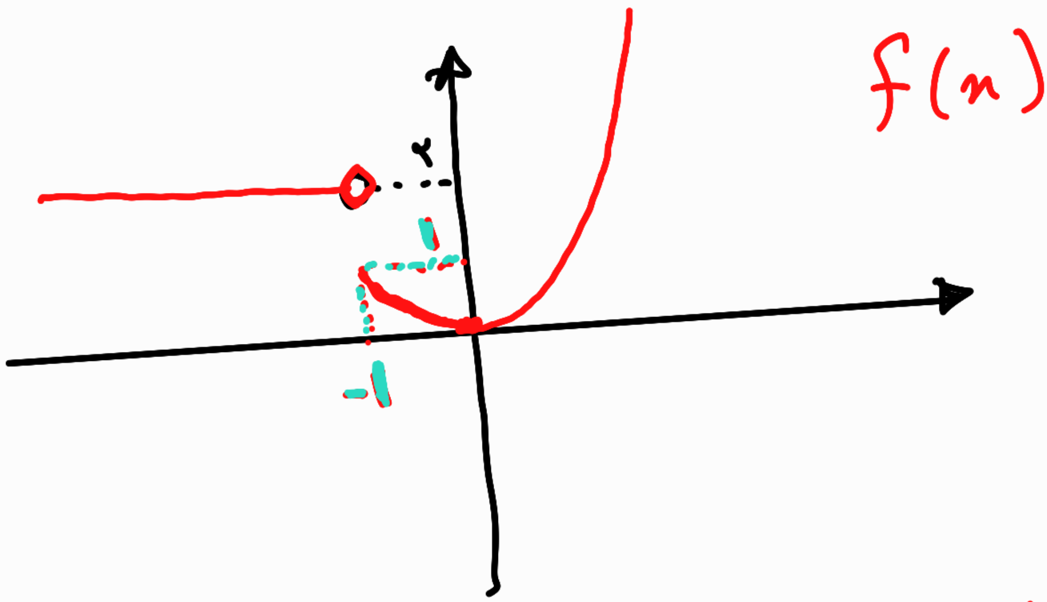


$$g(x) = f(2x+1)$$

دامنه تابع $g(x)$ بازه‌ی $[-4 \quad 2]$ است.

(۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$$



$[0 \quad +\infty)$: اکیداً صعودی

$[-1 \quad 0]$: اکیداً نزولی

---

(۵) چند جمله‌ای بر $x-2$ بخش پذیر است یعنی

اگر $x=2$ را در چند جمله‌ای جای‌گذاری کنیم

حاصل صفر می‌شود.

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 \xrightarrow{x=2} 8 + 4a + 2b + 1 = 0$$

$$4a + 2b = -9 \qquad (\mathrm{I})$$

چند جمله‌ای بر $x+1$ هم بخش‌پذیر است پس اگر

$x=-1$ را جای‌گذاری کنیم حاصل چند جمله‌ای صفر

می‌شود.

$$x^3+ax^2+bx+1 \xrightarrow{x=-1} -1+a-b+1=0$$

$$a-b=0$$

$$a=b \quad \text{II}$$

جای‌گذاری

I در II $\Rightarrow$ $۴a+۲a=-۹$

$$۴a=-۹$$

$$a=-\frac{۹}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

با توجه به I $\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$

۶)

طبق اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

می‌توانیم بنویسیم:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

تغییر متغیر $\sin x = t$ $\Longrightarrow$ $t^2 + t - \frac{3}{4} = 0$

$$\Delta = 1 - 4\left(-\frac{3}{4}\right) = 4$$

$$t_1 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2}$$

چون $t = \sin x$ و $\sin x$ مقادیری در بازه‌ی $[-1, 1]$ دارد پس $t_2 = -\frac{3}{2}$ غیرقابل قبول است.

$$\sin x = \frac{1}{۲} = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$

جواب ها در بازه‌ی $[۰ \quad \pi]$ عبارت انداز

$$\frac{\pi}{۶} \text{ و } \frac{۵\pi}{۶}$$

۷

الف)
$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{x+1}{۹-x^۲} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{x+1}{(۳-x)(۳+x)}$$

$$= \lim_{x \to ۳^+} \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

وقتی $x \to ۳^+$ برود $۳-x$ به سمت
صفر از چپ نزدیک می شود.

ب)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2+x+1}{4x^3-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

---

۱)

کاندید های مجانب قائم ریشه های مخرج هستند

که در اینجا $x=\pm1$ هستند.

و از آنجایی که صورت را صفر نمی کنند

هردو قابل قبول اند. پس مجانب قائم $\Leftarrow$ $x=1$ ، $x=-1$

برای مجانب افقی باید حد در بی نهایت را

محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+۲x^۲}{1-x^۲} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲}{-x^۲}$$

$$= -۲ \longrightarrow$$ مجانب افقی

$y = -۲$

۹

$x=1 \longrightarrow f(1) = 1 - \sqrt{1} + ۲ = ۲$

پس $A(1,۲)$ است.

$$f'(x) = ۳x^۲ - \frac{1}{۲\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = ۳ - \frac{1}{۲\sqrt{1}} = \frac{۵}{۲}$$

معادله خط مماس

$$y - ۲ = \frac{۵}{۲}(x-1) \Longrightarrow y = \frac{۵}{۲}x - \frac{1}{۲}$$

۱۰

الف)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5) + (6x)\sqrt{x}$$

ب)

$$g'(x) = 6x \cdot \cos(3x^2+5) - 3\cos^2 x \cdot \sin x$$

ج)

$$h'(x) = \frac{2x^2+x-1-(x)(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2}$$

۱۱

الف) $m(3) = \sqrt{3} + 54$

$m(4) = \sqrt{4} + 128 = 130$

$m(4) - m(3) = 130 - 54 - \sqrt{3}$

$= \sqrt{6} - \sqrt{3}$

ب)

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$$

$$m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 54$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + 54$$

۱۲

یافتن نقاط بحرانی در بازه‌ی $(-2 \quad 1)$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = 6x - 2$

$$6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

$$f(-2) = 12 + 4 + 5 = 21$$

$$f(1) = 3 - 2 + 5 = 6$$

x	-2		$\frac{1}{3}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	21	$\searrow$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$	6

ماکزیمم مطلق

مینیمم نسبی

مینیمم مطلق

۱۳

$(0\ ,\ 0)$ نقطه عطف است پس

$$f''(0)=0$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f''(x)=6x+2a$$

$$f''(0)=2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

بازنویسی تابع $f(x)$

$f(x) = x^3 + bx + c$

ازطرفی $f(0)=0$ است یعنی

$\boxed{c=0}$

و همچنین $f'(-2) = f'(2) = 0$

$f'(-2) = f'(2) = 12 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-12}$

14

$x=2$ مجانب قائم است چون

ریشه‌ی مخرج است وریشه‌ی صورت نیست.

ازطرفی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$

پس $y = 2$ مجانب افقی نمودار است.

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2}$$

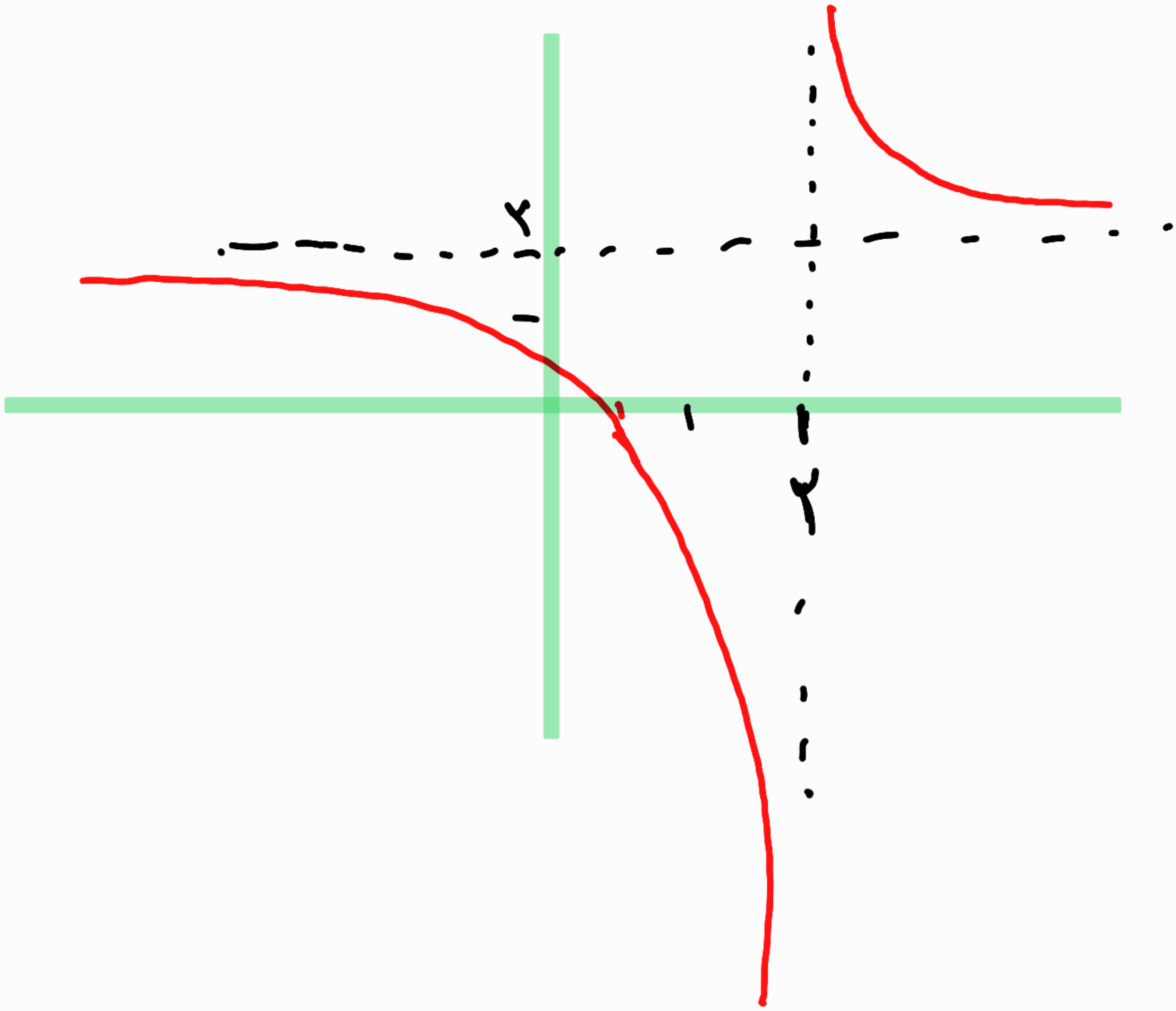
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$f'(x)$ همواره منفی است.

x		2	
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$	$-\infty \quad +\infty$	$\searrow$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$



۱۵ برای بررسی مشتق پذیری ابتدا باید پیوستگی را بررسی کرد

$$f(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} |x^2 - 1| = 0$$

پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1,\ x<-1 \\ -x^2+1 & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \\ & x>1 \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$$

در $x=1$

$$f'_+(1)=2$$

$$f'_-(1)=-2$$

پس مشتق‌پذیر نیست.