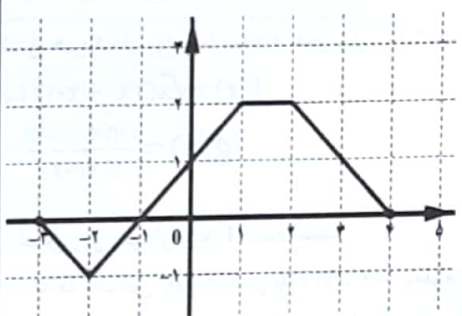
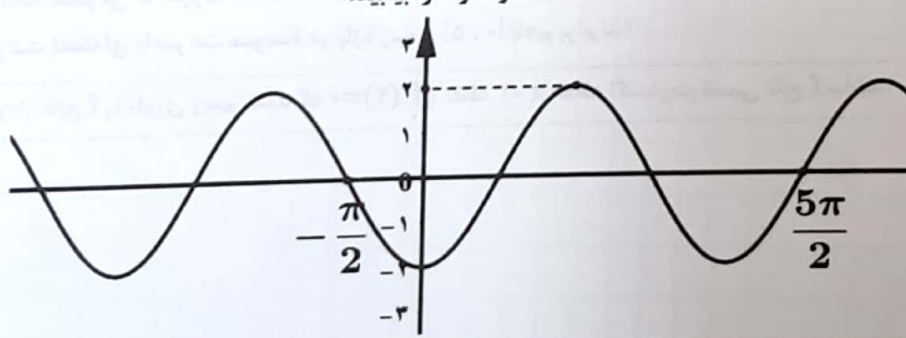
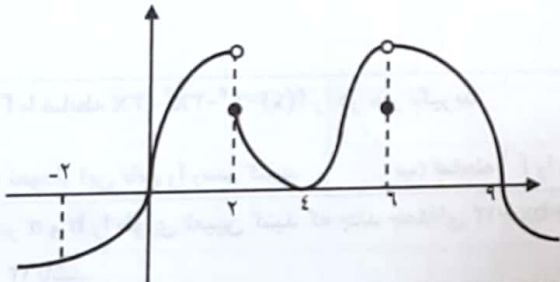


ساعت شروع: ۸ صبح	امتحان شبه‌نهایی حسابان دوازدهم ریاضی فیزیک	
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	سوالات پاسخ‌برگ دارد.	نوبت دوم
تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۰	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد.	

۱/۲۵	<p>کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟</p> <p>الف) تابع با ضابطه <math>f(x) = \log_p^x</math> در بازه <math>(0, +\infty)</math> اکیداً صعودی است.</p> <p>ب) خط <math>x = \pi</math> مجانب قائم تابع با ضابطه <math>y = \tan x</math> است.</p> <p>ج) شیب خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه <math>y = x^2 - 2x</math> در نقطه <math>x = 0</math> مثبت است.</p> <p>د) <math>x = \frac{\pi}{4}</math> جوابی برای معادله <math>\sin 2x = \cos x</math> می‌باشد.</p> <p>و) مشتق چپ تابع با ضابطه <math>f(x) = x[x]</math> در نقطه صفر برابر صفر است. [ ] (نماد جزء صحیح است)</p>
۱/۵	<p>در شکل زیر نمودار تابع <math>f</math> آمده است.</p> <p>الف) نمودار تابع با ضابطه <math>g(x) = f(1-x) + 1</math> را رسم کنید.</p> <p>ب) دامنه و برد تابع <math>g</math> را معلوم کنید.</p> 
۱/۵	<p>تابع <math>f</math> با ضابطه <math>f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) نمودار این تابع را رسم کنید.</p> <p>ب) ضابطه <math>f^{-1}</math> را بنویسید.</p>
۱	<p>مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای <math>x^2 + ax^2 + bx + 12</math> بر <math>x-2</math> بخش پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر <math>x+1</math> برابر ۱۲ باشد.</p>
۱/۲۵	<p>در شکل زیر نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = c + a \cos bx</math> داده شده است. <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> را بیابید.</p> 
۱/۵	<p>معادله مثلثاتی <math>\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}</math> را حل کنید. سپس جواب‌های در بازه <math>(0, 2\pi)</math> را مشخص کنید.</p>
۱	<p>اگر <math>\tan \alpha = 3</math> و <math>\tan(\alpha + \beta) = 7</math> مقدار <math>\tan \beta</math> را حساب کنید.</p>
۲	<p>حدهای زیر را محاسبه کنید. [ ] (نماد جزء صحیح است)</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x \sin x}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x - \sqrt{x}}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(x-1) + x}{(4-x)(4+x)}</math></p>

۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.</p> <p>الف) <math>f(2) = 4</math></p> <p>ب) خط <math>x = 2</math> مجانب قائم آن باشد.</p> <p>پ) خط <math>y = 3</math> مجانب افقی آن باشد.</p> <p>ت) دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد.</p>	۹
۱/۵	<p>تابع <math>f</math> با ضابطه <math>f(x) = \begin{cases} 4-x^2 &amp; x &lt; 0 \\ x^2-2 &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> مفروض است.</p> <p>الف) مشتق‌های چپ و راست این تابع را در صفر بیابید.</p> <p>ب) آیا تابع <math>f</math> در <math>x = 0</math> مشتق پذیر است؟</p>	۱۰
۱	<p>اگر تابع <math>f</math> در <math>x = 0</math> مشتق پذیر و <math>g(x) = \frac{2}{x}</math> و <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3</math> مقدار <math>(f \circ g)'(1)</math> را حساب کنید.</p>	۱۱
۲	<p>مشتق هریک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.</p> <p>الف) <math>f(x) = \sqrt{x}(2x^2 + x - 1)</math></p> <p>ب) <math>g(x) = \frac{\sin x \cos 2x}{x - \sin 4x}</math></p>	۱۲
۱/۵	<p>در شکل زیر نمودار تابع <math>f</math> آمده است:</p> <p>الف) نقاط بحرانی تابع <math>f</math> را در بازه <math>(-2, 9)</math> معلوم کنید.</p> <p>ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع <math>f</math> در نقطه <math>1</math> مثبت است یا منفی؟</p> <p>ج) نقاط مینیمم نسبی تابع <math>f</math> را مشخص کنید.</p> <p>د) مشتق راست تابع <math>f</math> در نقطه <math>6</math>، <math>+\infty</math> است یا <math>-\infty</math>؟</p> 	۱۳
۱/۵	<p>معادله متحرکی به صورت <math>f(t) = t^2 - t + 10</math> بر حسب متر در بازه زمانی <math>[0, 5]</math> (<math>t</math> بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی <math>[0, 5]</math> باهم برابرند؟</p>	۱۴
۰/۵	<p>نمودار تابع <math>f</math> را طوری رسم کنید که <math>f'(2) = 0</math> و نقطه <math>x = 2</math> نقطه اکسترمم نسبی تابع <math>f</math> نباشد.</p>	۱۵

۱) الف) درست ب) نادرست ج) نادرست د) نادرست ه) درست

۲) الف)

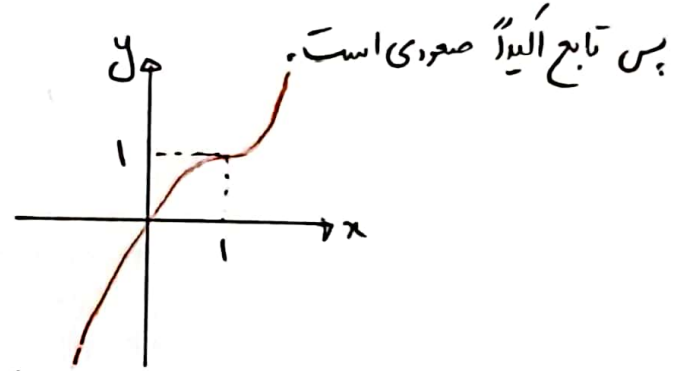
ب) دامنه  $g$ :  $-3 \leq 1-x \leq 4$   
 $\Downarrow$   
 $-3 < x < 4$   $Dg = [-3, 4]$   $\checkmark$

بر  $g$ :  $Rg = R_{f+1} = [0, 3]$   $\checkmark$

۳) الف) فقط یک ریشه دارد.  $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $\Delta < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ ;  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$   
 اگر مشتق را تعیین علامت کنیم، خواهیم داشت:

$x$	۱
$f'(x)$	+ 0 +
$f(x)$	↗ ↘ ↗



ب) برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون سعی می‌کنیم  $x$  را بر حسب  $y$  بنویسیم.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$   $\checkmark$  \* از اتحاد مکعب استفاده کردیم. برای رسم تابع وارونش خوبی است.

14 اگر چند جمله ای  $P(x)$  بر  $(x-\alpha)$  بخش پذیر باشد، آنگاه  $P(\alpha) = 0$  است.

لذا عدد 2 در  $(x-2)$  ریشه عبارت است.  $2^3 + 2^2 a + 2b + 12 = 0 \Rightarrow 2a + b = -10$

در قسمت دوم قسمة تقسیم را می نویسیم.

$$P(-1) = (x+1)Q(-1) + R(-1)$$

پس  $P(-1) = 12$  است.


$$(-1)^3 + (-1)^2 a + (-1)b + 12 = 0 \Rightarrow a - b = 1$$

در قسمت قبل هم  $P(2) = 0$  بود.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -4 \end{array} \right. \text{ دو معادله و دو مجهول لاجرم می کنیم.}$$

15  $\leftarrow$   $\text{MIN} = -|a| + c$  ,  $\text{Max} = |a| + c$  ,  $-2 = -|a| + c$  ,  $2 = |a| + c$

از حل دو معادله فوق خواهیم داشت  $c = 0$  ,  $|a| = 2$ .

باتوجه به اینکه تابع  $\cos(bx)$  صرف نظر از علامت  $b$  هنگام عبور از (0) به صورت  است پس در این سؤال گزینه است.  $a = -2$

طبق شکل یک دوره تناوب + نصفی داریم.  $\frac{5\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 3\pi = \frac{1}{2}T \Rightarrow T = 2\pi$

در توابع این شکلی،  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. لذا  $b = 1$  یا  $-1$  است. علامت  $b$  مهم نیست.

16  $\leftarrow$  اتحاد مثلثاتی  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\textcircled{1} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} 2x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

مجموعه حاصل  $[0, 2\pi]$

- $\frac{\pi}{3}$  (2)     $\frac{\pi}{6}$  (1)  
 $\frac{4\pi}{3}$  (4)     $\frac{7\pi}{6}$  (3)

$$v = \frac{r + \tan \beta}{1 - r \tan \beta} \Rightarrow v - r \tan \beta = \frac{r + \tan \beta}{1 - r \tan \beta}$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{r}{11}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{نقشه ۷}$$

الف) حد : عدد مثبت / صفر صفری

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{1}{e^+ x 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{1}{0^- x e^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{حد چپ}$$

پس حاصل حد می شود  $+\infty$ .

ب) به جای جزء صحیح صفر می گذاریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ج) ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{-x^2 + 14} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x})}{x^2(-1 + \frac{14}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - c}{-1 + 14} = -2$$

(این روش مبنای قاعده هم ارزی پر توان است)

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < c \\ 2x & x \geq c \end{cases}$$

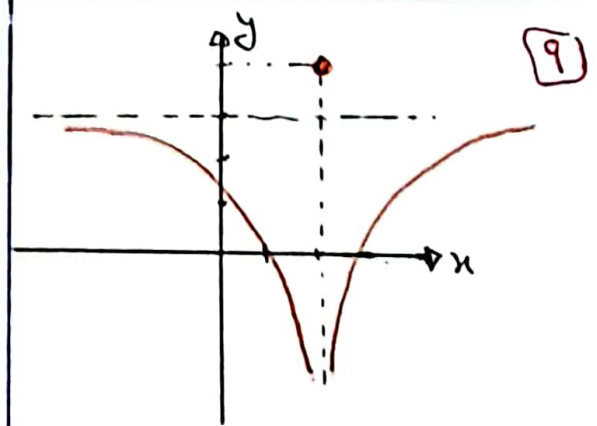
الف)

$$f'_-(c) = 0 \quad \text{منطقه بالا}$$

$$f'_+(c) = c \quad \text{منطقه پایین}$$

$$f'(c) = c \quad \text{منطقه پایین}$$

۱۰



ب) البته چون مشتق تابع وجود ندارد.

از طرفی مشتق چپ در آنجا وجود و برابرند.

۱۱) حاصل حدی که سؤال داده است همان  $f'(2)$  است.

به قاعده زنجیری:  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1))$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x^2} \Rightarrow g'(1) = -2$$

$$f'(g(1)) = f'(2) = 2$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(1) = -2 \times 2 = -4 \quad \checkmark$$

۱۲) به قاعده ضرب  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

$$\text{الف) } (\sqrt{x} \cdot (2x^2 + x - 1))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2 + x - 1) + (4x + 1)\sqrt{x} = 5x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \checkmark$$

می توانیم  $x^{\frac{1}{2}}$  را در پرانتز ضرب کنیم:

$$x^{\frac{1}{2}}(2x^2 + x - 1) = 2x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

ب)  $\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x$  اتحاد

به قاعده تقسیم  $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$$g(x) = \frac{-2\sin^2 x + \sin x}{x - \sin^2 x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{(-4\cos x \sin^2 x + \cos x)(x - \sin^2 x) - (1 - 4\cos^2 x)(-2\sin^2 x + \sin x)}{(x - \sin^2 x)^2} \quad \checkmark$$

مشتق صورت =  $-4\cos x \sin^2 x + \cos x$

مشتق مخرج =  $1 - 4\cos^2 x$

۱۳) الف)  $x=0, x=2, x=4, x=6$

(اگر فرض کنیم نقاط بحرانی نقاط هستند که یا مشتق پذیر نیستند یا مشتق صفر است.)

ب) منظور  $f'(1)$  یا همان شیب خط مماس بر منحنی است که مثبت است

ج)  $x=4$  و  $x=6$

د) هیچ کدام.  $\checkmark$

$$v = f'(t) \quad , \quad v_{av} = \frac{f(\omega) - f(\epsilon)}{\omega - \epsilon} \quad \checkmark \quad (14)$$

معادله سرعت زمان :  $v(t) = f'(t) = 2t - 1$

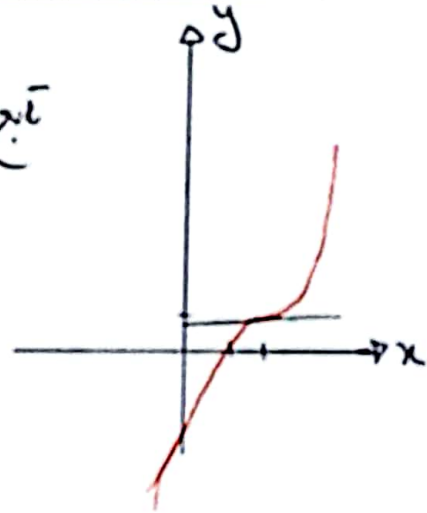
جان  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(\omega) - f(\epsilon)}{\omega - \epsilon} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \text{ m/s}$$

$$2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \text{ s} \quad \checkmark$$

$$y = (x-2)^3 + 1 \quad \text{تابع}$$

$$y'(2) = 0$$



(15)

∴ پاسخ تشریحی سوالات : علی محمد زاهد شهبه‌ری ∴

رتبه ۳۳ م ۱ کنگور ریاضی ۱۴۱

دانشجوی مهندسی کامپیوتر دانشگاه شریف

« آرزوی موفقیت دارم. »

همیشه بچیند بزنند ❤️