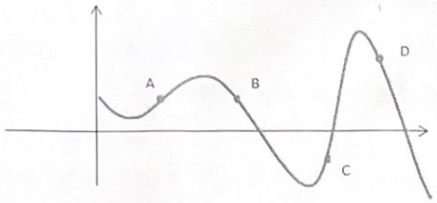
بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش ناحیه یک زاهدان

سوالات امتحان شبه نهایی درس: **حسابان ۲**	رشته : ریاضی فیزیک	تعداد صفحه: ۲	**مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	دورهٔ متوسطهٔ دوم		تاریخ امتحان : ۲۶ /۱ /۰۲
			نوبت صبح
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد ناحیه یک زاهدان			

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.	بارم
۱	**درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید** الف) ماکسیمم تابع $y = -۴ - ۵\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$ برابر ۱- است. ب) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد صعودی است. ج) اگر برد تابعی محدود باشد آن تابع فاقد مجانب افقی است. د) توابع یکنوا نقطهٔ عطف ندارند.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) نمودار تابع $y = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸$ را می توان با ..... واحد انتقال نمودار $y = x^۳$ به سمت ..... رسم کرد. ب) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی مقدار a باید برابر با ..... باشد. ج) دورهٔ تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = ۲sin\frac{\pi x}{۲} - \sqrt{۳}$ به ترتیب برابر با ..... و ..... و ..... است.	۱/۵
۳	در تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \le ۱ \\ x^۲ + ۳ & x > ۱ \end{cases}$ با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق های چپ و راست تابع f را در $x = ۱$ محاسبه کنید. آیا این تابع در $x = ۱$ مشتق پذیر است؟	۱
۴	در چند جمله ای $p(x) = x^۳ + ax^۲ + x + b$ مقادیر a, b را چنان بیابید که باقی ماندهٔ تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر با ۴ باشد و بر $x + ۲$ بخش پذیر باشد.	۱/۲۵
۵	معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید . $۲sin^۲x + ۹cosx + ۳ = ۰$	۱/۲۵
۶	مجانبهای افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y = \frac{۲x + ۵}{\lvert x\rvert - ۱}$	۱

۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{[x]-۲}{۳-x}$ ب) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۲+۲x+۳}-x}{۳x-۱}$	۱/۵
۸	با توجه به نمودار جدول را کامل کنید.  شیب: ۲ | ۰/۵ | -۱ | -۲ نقطه:	۱
۹	با استفاده از تعریف مشتق معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطهٔ $x=۳$ به دست آورید	۱/۵
۱۰	مشتق بگیرید . (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x)=\sqrt{x^۲-۵x}\sin\frac{x}{۲}+\cos x$	۱/۲۵
۱۱	اگر $f'(x)=\frac{۱}{x^۲}$ باشد آنگاه مشتق تابع $f(tanx)$ را در $x=\frac{\pi}{۴}$ به دست آورید.	۰/۷۵
۱۲	با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر مقدار f' را برای نقاط داده شده حدس بزنید. x: ۱۲ | ۸ | ۴ $f(x)$: ۹۰ | ۱۱۰ | ۱۵۰ مقدار تقریبی $f'(x)$:	۰/۷۵
۱۳	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی رو به بالا پرتاب می کنیم. اگر ارتفاع این جسم از زمین از معادلهٔ $h(t)=-۳t^۲+۲۴t$ به دست آید ، سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد با زمین را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۴	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۲+\lvert x+۱\rvert$ را در بازهٔ $[۲\text{ و }-۲]$ بیابید.	۱/۷۵
۱۵	جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=x^۴+۲x^۳-۳۶x^۲+۸$ زیر را مشخص کنید.	۱/۷۵
۱۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲(x+۳)$ را رسم کنید.	۲

موفق باشید.

حسابان ۲ـ استان سیستان و بلوچستان ـ زاهدان — سعادت محمدی‌راد ـ رتبه ۸۴ کنکور سراسری

۱ـ الف) نادرست ب) درست ج) درست د) نادرست

۲ـ الف) ۲ واحد ـ چپ ب) صفر ج) ۴ و $2\sqrt{3}$ ، $-2\sqrt{3}$ ، -4

۳ـ

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\le 1 \\ x^2+2 & x>1 \end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

چون مشتق راست تابع تعریف شده و مشتق چپ و راست برابر نداریم تابع در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر نیست

۴ـ

$$x^3+ax^2+x+b=(x-1)Q(x)+3 \xrightarrow{x=1} 2+a+b=3$$

$$x^3+ax^2+x+b=(x+2)Q'(x)+0 \xrightarrow{x=-2} -10+4a+b=0$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=10 \end{cases} \longrightarrow a=\frac{8}{3} \quad b=\frac{-2}{3}$$

۵ـ

$$2\sin^2 x+9\cos x+3=0 \longrightarrow 2(1-\cos^2 x)+9\cos x+3=0$$

$$2\cos^2 x-9\cos x-5=0$$

$$\Delta=121 \qquad \cos x=\frac{9\pm 11}{4}$$

$\cos x=5$ ✗

$\cos x=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}}$$

۶ـ

$$y=\frac{2x+5}{|x|-1}$$

مجانب‌های قائم: $|x|-1=0 \longrightarrow |x|=1 \longrightarrow x=\pm 1$

مجانب‌های افقی:

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{|x|-1}=2 \qquad y=2$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{|x|-1}=-2 \qquad y=-2$$

۷- ب) $\lim_{x \to 2^+} \frac{[x]-2}{2-x} = \frac{2-2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+5} - x}{4x-1}$ تقریب $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-x}{4x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{4x} = \frac{-2}{4}$

۸-

شیب	-۲	-۱	۰٫۵	۲
نقطه	D	B	A	C

۹- $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad f(3)=1$ $\quad A\Big|_1^3$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-2-1}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} = \frac{1}{2} = m$$

$$y-1 = \frac{1}{2}(x-3) \longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

۱۰- $f(x) = \sqrt{x^2-5x}\,\sin\frac{x}{2} + \cos x$

$$f'(x) = \frac{2x^2-5}{2\sqrt{x^2-5x}} \times \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-5x}\cos\frac{x}{2} - \sin x$$

۱۱- $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad \left(f(\tan x)\right)' = f'(\tan x) \times (1+\tan^2 x)$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f'(1) \times (1+1) = 2f'(1) \xrightarrow{f'(1)=1} 2$

حسابان ۲ - استان سیستان و بلوچستان - زاهدان

سجاد معتمدنژاد - رتبه ۸۶ کنکور سراسری

۳۰

۱۳-

$$h(t) = -۴t^۲ + ۲۴t \quad \longrightarrow \quad v(t) = h'(t) = -۸t + ۲۴$$

$$v(۰) = ۲۴ \ m/s \quad \text{لحظه پرتاب}$$

چون در انیمیشن کلوله سرعت دوبرابر شد زمان شکافتن را طی می‌کند لذا لحظه صفر شدن سرعت را پیدا می‌کنیم و سرعت کلوله در هنگام برخورد با زمین را با ۲t ی سرعت می‌کنیم

$$-۸t + ۲۴ = ۰ \quad \longrightarrow \quad t = ۳ s \quad \longrightarrow \quad \text{نقطه اوج}$$

$$\Rightarrow \quad t = ۸ s \quad \longrightarrow \quad \text{لحظه برخورد با زمین}$$

$$v(۸) = -۳۲ + ۲۴ = -۸ \ m/s \quad \text{هنگام برخورد با زمین}$$

۱۴-

$$f(x) = x^۲ + |x+۱| \qquad [-۲, ۲]$$

نقاط اکسترمم مطلق یا در ابتدا و انتهای بازه‌ی داده شده هستند و یا در نقاط بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + x + ۱ & x \geq -۱ \\ x^۲ - x - ۱ & x < -۱ \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \text{رسم}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x > -۱ \\ ۲x - ۱ & x < -۱ \end{cases}$$

$۲x + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{۱}{۲}$ ✓

$۲x - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}$ ✗ نقطه‌ی داخله

$x = -۱$ نقطه‌ی بحرانی چون شکل تابع عوض شده

$$\begin{cases} f(-۲) = ۵ \\ f(-۱) = ۱ \\ f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} \longrightarrow \text{Abs Min} \\ f(۲) = ۷ \longrightarrow \text{Abs Max} \end{cases}$$

۱۵-

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 8$

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x$

$f''(x) = 12x^2 + 12x - 72 = 0 \quad 12(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0$

$\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$ نقاط عطف

x		-3		2	
y''		$+$	$-$		$+$
y		رو به بالا	رو به پایین		رو به بالا

۱۶-

$f(x) = (x-1)^2(x+3) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$ نقاط اکسترمم نسبی (بحران)

$f''(x) = 6x + 2 = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{3}$ نقطه عطف

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$		$\frac{256}{27}$		$\frac{128}{27}$		0		$+\infty$