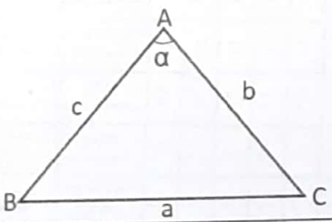
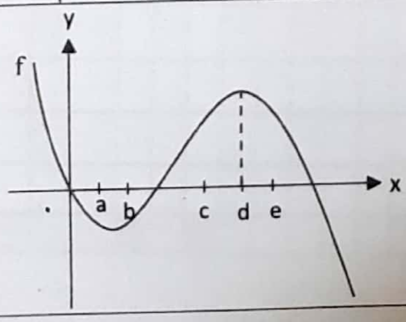
بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی:	امتحان شبه‌نهایی ریاضی دوازدهم علوم تجربی	ساعت شروع: ۸ صبح
نام مدرسه:	نوبت دوم — سوالات پاسخ‌برگ دارد.	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شهرستان:	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد.	تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۰

ردیف	سؤال	نمره
۱-	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=-2x^3+1$ در دامنهٔ تعریف خود اکیداً نزولی است. ب) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. پ) دورهٔ تناوب تابع $y=2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{2}$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.	۰/۷۵
۲-	در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. الف) اگر $f(g(x))=2x^2-12x+15$ و $f(x)=2x-3$، آنگاه ضابطهٔ تابع g برابر .... است. ب) دو تابع f و g وارون هم‌دیگر هستند اگر و تنها اگر تابع‌های fog و gof برابر تابع .... باشند. پ) فرض کنیم خط d خط مولد رویه‌ای مخروط باشد. اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک .... است.	۰/۷۵
۳-	سؤالات چهار گزینه‌ای: I. حاصل $\sin^2 15$ برابر است با: الف) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ب) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ پ) $\frac{1}{4}$ ت) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ II. حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{1}{x-2}$، به ترتیب برابر است با: الف) $-\infty , -\infty$ ب) $+\infty , +\infty$ پ) $+\infty , -\infty$ ت) $-\infty , +\infty$ III. تابع $f(x)=ax^3-3x^2+d$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. اگر (1,-2) یکی از نقاط اکسترمم باشد، نقطهٔ اکسترمم دیگر کدام و چه نوع است؟ الف) $(0,-1)$ و ماکزیمم نسبی ب) $(2,-1)$ و مینیمم نسبی پ) $(0,-3)$ و مینیمم نسبی ت) $(2,-3)$ و ماکزیمم نسبی	۱/۵
۴-	نمودار تابع $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ با دامنهٔ $[-2\pi,2\pi]$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای از $[0,2\pi]$ تابع اکیداً صعودی است.	۱
۵-	طول اضلاع یک مثلث ۲، ۶ و $2\sqrt{13}$ می‌باشد. زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگتر چقدر است؟ راهنمایی: در مثلث دلخواه ABC، رابطهٔ زیر برقرار است: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$  	۱/۲۵
۶-	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+3}{3x^2-2x-1}$ پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x}$	۱/۵
۷-	نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.  	۱

شیب	-۲	-۰/۵	۰/۵	۲
نقطه				

۸-	تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 2 \\ 4x-2 & x<2 \end{cases}$ مفروض است. الف) مشتق‌پذیری تابع f در x=۲ را بررسی کنید. ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.	۱/۲۵ ۰/۵
۹-	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x)=(\frac{x^2-4}{5x})^5$ ب) $f(x)=\sqrt{x}(3x^3-4)$	۰/۷۵ ۰/۵
۱۰-	توپی از سطح زمین به طور عمود رو به بالا پرتاب می‌شود (حرکت به سمت بالا را جهت مثبت در نظر می‌گیریم). اگر معادلهٔ ارتفاع توپ از سطح زمین $h(t)=-t^2+10t$ باشد. الف) سرعت متوسط توپ در بازهٔ [۱,۳] کدام است؟ ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای برابر ۸ متر بر ثانیه است؟	۱
۱۱-	اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^3-27x$ در بازهٔ [۰,۴] را مشخص کنید.	۱/۵
۱۲-	بین دو عدد حقیقی x و y رابطهٔ $4x-y=16$ برقرار است. مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها مینیمم شود.	۱/۵
۱۳-	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند را مشخص کنید.	۰/۵
۱۴-	معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که $O(1,-1)$ مرکز دایره باشد و روی خط به معادلهٔ $2x+y=2$ وتری به طول $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ جدا کند.	۱/۷۵
۱۵-	وضعیت دایره‌های $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ و $x^2+y^2-4x+2y=4$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱
۱۶-	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و ظرف دوم شامل ۷ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. از ظرف اول توپی انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس توپی به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این توپ قرمز است؟	۲
	موفق باشید	۲۰

جمهوری اسلامی ایران

موسسه فرهنگی - آموزشی ژیوار

پاسخ‌نامه تشریحی امتحان شبه‌نهایی

ریاضی ۳ دوازدهم علوم تجربی

مـــــرحلـــــه دوم (کل کتاب)

سوال / درس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	بارم
۱–۱	۰/۲۵			۱													۱/۲۵
۱–۲	۰/۲۵	۰/۲۵															۰/۵
۱–۳		۰/۲۵															۰/۲۵
فصل اول	۰/۵	۰/۵		۱													۲
۲–۱	۰/۲۵																۰/۲۵
۲–۲			۰/۵		۱/۲۵												۱/۷۵
فصل دوم	۰/۲۵		۰/۵		۱/۲۵												۲
۳–۱			۰/۵			۱											۱/۵
۳–۲						۰/۵											۰/۵
فصل سوم			۰/۵			۱/۵											۲
۴–۱							۱										۱
۴–۲								۱/۷۵	۱/۲۵								۳
۴–۳										۱							۱
فصل چهارم							۱	۱/۷۵	۱/۲۵	۱							۵
۵–۱			۰/۵								۱/۵						۲
۵–۲												۱/۵					۱/۵
فصل پنجم			۰/۵								۱/۵	۱					۳/۵
۶–۱		۰/۲۵											۰/۵				۰/۷۵
۶–۲														۱/۷۵	۱		۲/۷۵
فصل ششم		۰/۲۵											۰/۵	۱/۷۵			۳/۵
فصل هفتم																۲	۲
مجموع	۰/۷۵	۰/۷۵	۱/۵	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱	۱/۷۵	۱/۲۵	۱	۱/۵	۱	۰/۵	۱/۷۵	۱	۲	۲۰

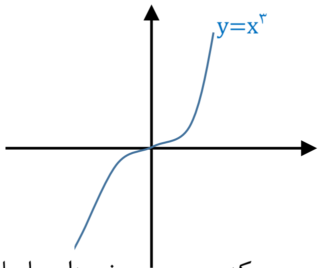
ردیف	پاســــــــخ	نمره

۱

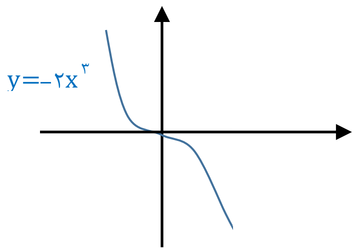
الف) فصل اول درس ۱. درست

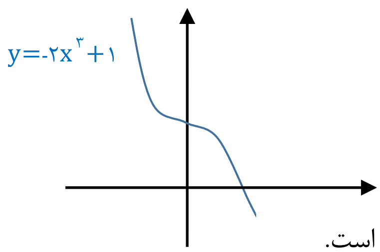
ابتدا توجه می‌کنیم که دامنهٔ توابع چند جمله‌ای کل اعداد حقیقی است. به دو طریق سؤال را بررسی می‌کنیم:

- **بررسی از طریق هندسی (نمودار):** نمودار تابع $y=x^3$ به صورت مقابل است (صفحه ۳ کتاب)



که تابعی صعودی است. برای رسم نمودار تابع $y=-2x^3+1$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار را در (۲-) ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای محور عرض‌ها به سمت بالا انتقال می‌دهیم.





که تابع نزولی است.

بررسی جبری:

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3>-2x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3+1>-2x_2^3+1$$

مثال ۱: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x)=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است. (امتحان نهایی ریاضی ۳ خرداد ۱۴۰۱-۰/۲۵ نمره)

ب) تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است. (امتحان نهایی ریاضی ۳ خرداد ۱۳۹۹-۰/۲۵ نمره)

پاسخ:

الف) درست- با توجه به توضیحات ارائه شده، واضحاً $f(x)=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است.

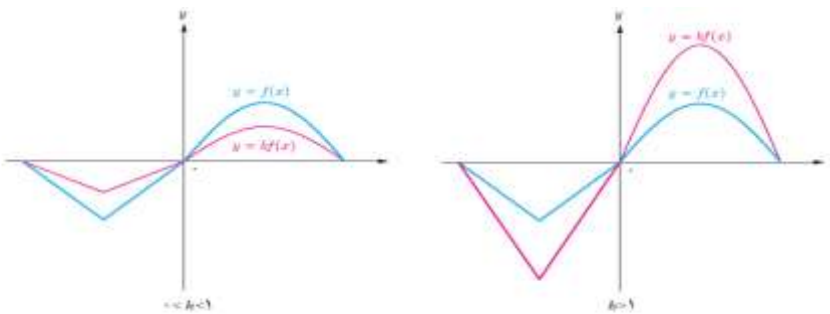
ب) درست- در صفحهٔ ۷ کتاب درسی خواندیم که تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

۰/۷۵

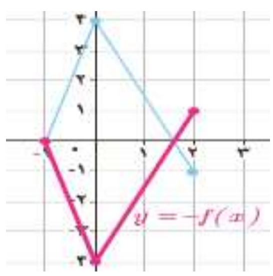
ب) فصل دوم درس ۲. نادرست

در این فصل دو نوع انبساط و انقباض را مطالعه کردیم:

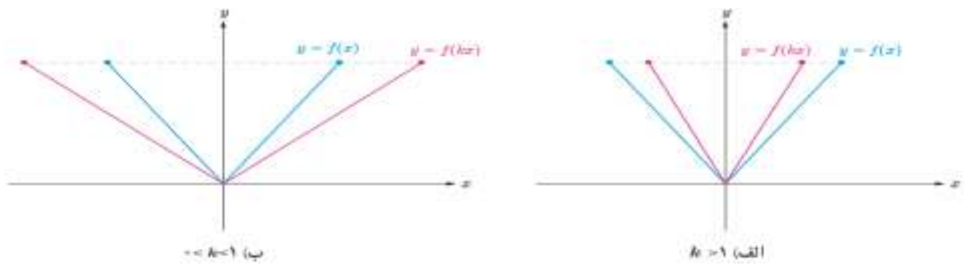
انبساط و انقباض عمودی: برای رسم نمودار تابع $y=k\,f(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y=k\,f(x)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است. مثال:



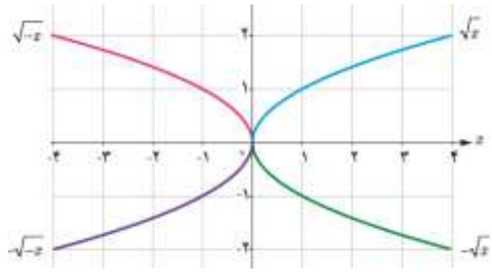
اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=k\,f(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=k\,f(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید. اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ **قرینه** نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است. مثال:



انبساط و انقباض افقی: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود. مثال:

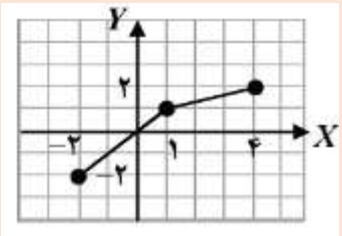


اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است. مثال:

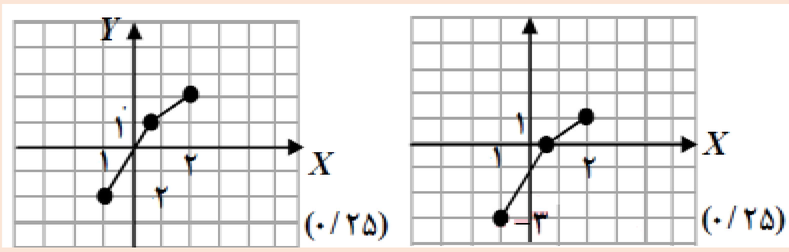


مثال ۲: با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

(امتحان نهایی حسابان ۲ خرداد۹۹–۱ نمره)



حل:



$D_g=[-۱,۲]$ (۰/۲۵) و $R_g=[-۳,۱]$ (۰/۲۵).

نکته: اگر دامنه و برد تابع $y=g(x)$ به ترتیب $[a,b]$، $[c,d]$ باشد، در این صورت دامنه و برد تابع $f(x)=k'g(kx+h)+h'$ به ترتیب $[\frac{a-h}{k},\frac{b-h}{k}]$ و $[k'c+h',k'd+h']$ خواهد بود و نقطه (x_0,y_0) به نقطه‌ی $(\frac{x_0-h}{k},k'y_0+h')$ انتقال می‌یابد.

برعکس اگر دامنه و برد تابع $f(x)=k'g(kx+h)+h'$ به ترتیب $[a,b]$، $[c,d]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=g(x)$ به ترتیب برابر خواهد شد با $[ka+h,kb+h]$ و $[\frac{c-h'}{k'},\frac{d-h'}{k'}]$ و نقطه (x_0,y_0) به نقطه $(kx_0+h,\frac{y_0-h'}{k'})$ انتقال می‌یابد.

پ) فصل دوم درس ۱. نادرست

در صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی خواندیم که دوره تناوب تابع‌های $y=a\sin(bx+h)+c$ و $y=a\cos(bx+h)+c$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است. لذا دورهٔ تناوب $y=۲\sin\left(\frac{۳}{۲}x\right)+\frac{۱}{۲}$ برابر است با $\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}$.

مثال ۳: درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را مشخص کنید.

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x$ برابر ۲π است.

(امتحان نهایی ریاضی ۳ خرداد ۱۳۹۸–۰٫۲۵ نمره)

پاسخ:

نادرست- در صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی خواندیم که تابع $f(x)=\tan x$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است.

۲

الف) فصل اول درس ۱. $(x-۳)^۲$

مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۲ کتاب، سعی در بازسازی ضابطهٔ f در fog داریم:

$$f(g(x))=۲x^۲-۱۲x+۱۵=۲x^۲-۱۲x+۱۸-۳=۲(x^۲-۶x+۹)-۳=۲g(x)-۳\Rightarrow g(x)=x^۲-۶x+۹=(x-۳)^۲$$

مثال ۵: اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.

(امتحان نهایی ریاضی ۳ خرداد ۱۳۹۹-۱ نمره)

حل:

$$f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴=۳x^۲-۶x+۱۸-۴=۳(x^۲-۲x+۶)-۴=۳g(x)-۴\Rightarrow g(x)=x^۲-۲x+۶$$

ب) فصل اول درس ۳. همانی

در صفحه ۲۵ کتاب درسی خواندیم که: دو تابع f و g وارون همدیگر هستند اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in D_g$، $fog(x)=x$ و به ازای هر $x\in D_f$، $gof(x)=x$ یعنی تابع‌های fog و gof برابر تابع همانی ($I(x)=x$) باشند.

مثال ۴: درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$ و $g(x)=-\frac{۲x+۷}{۶}$ وارون یکدیگرند. (امتحان نهایی ریاضی ۳ دی ۱۴۰۰-۰/۲۵ نمره)

پاسخ:

نادرست- تابع‌های fog و gof برابر تابع همانی ($I(x)=x$) نمی‌باشند.

$$fog(x)=-\frac{۷}{۲}(-\frac{۲x+۷}{۶})=\frac{۱۴x+۴۹}{۱۲}\neq x\neq gof(x)=-\frac{۲(-\frac{۷}{۲}x-۳)+۷}{۶}=\frac{۷x-۱}{۶}$$

پ) فصل ششم درس ۱. سهمی

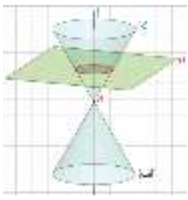
موارد زیر در مورد فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی را به یاد بسپارید.

الف) صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است:

۱) صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

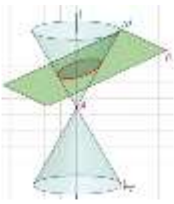
۱′) صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، شکل حاصل یک نقطه است.

حالت کلی ۱′: اگر صفحه‌ای فقط از رأس سطح مخروط عبور کند و سطح مخروط را قطع نکند، سطح مقطع حاصل یک نقطه می‌باشد.

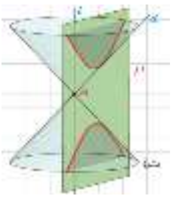


ب) صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نیست و با مولد d نیز موازی نیست:

۲) صفحه P تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، شکل حاصل بیضی است.



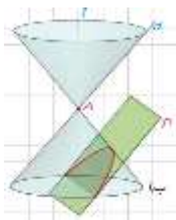
۳) صفحه P هر دو نیمهٔ بالایی و پایینی مخروط را قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، شکل حاصل یک هذلولی است.



۳′) صفحه P هر دو نیمهٔ بالایی و پایینی مخروط را قطع و از رأس سطح مخروطی عبور کند، شکل حاصل دو خط متقاطع است.

پ) صفحه P با مولد d موازی است:

۴) صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور نکند، شکل حاصل سهمی است.



۴′) صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، شکل حاصل یک خط است.

۰/۷۵

۳

I) فصل دوم درس ۲. گزینهٔ ت صحیح است

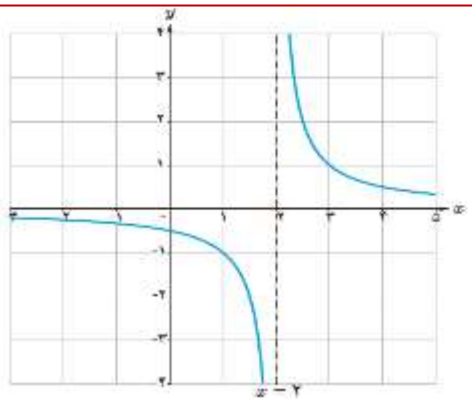
با توجه به فرمول $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ (صفحه ۴۳ کتاب) داریم: $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$. لذا: $\sin^۲ ۱۵=\frac{۱-\cos ۳۰}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$ (پاسخ

سؤال ۱۵ را نیز مطالعه کنید.)

II) فصل سوم درس ۱. گزینهٔ پ صحیح است

حد این تابع در مثال صفحهٔ ۵۶ بررسی شده است.

۱/۵



خط $x=۲$ مجانب قائم تابع است. در حالت کلی تابع $f(x)=\frac{a}{cx-d}$ در ریشهٔ مخرج، یعنی $x=\frac{d}{c}$ مجانب قائم دارد. اگر $\frac{a}{c}>۰$، حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$ است و اگر $\frac{a}{c}<۰$، حد راست $-\infty$ و حد چپ $+\infty$ است.

III) فصل پنجم درس ۲. گزینهٔ الف صحیح است

نقطهٔ $(۱,-۲)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$a(۱)^۳-۳(۱)^۲+d=-۲\Rightarrow a+d=۱$$

از سوی دیگر طبق قضیهٔ صفحهٔ ۱۰۶:

قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$.

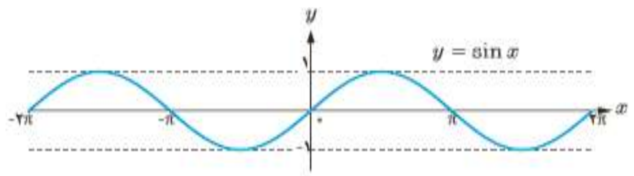
داریم $f'(۱)=۰$، لذا:

$$۳a(۱)^۲-۶(۱)=۰\Rightarrow a=۲$$

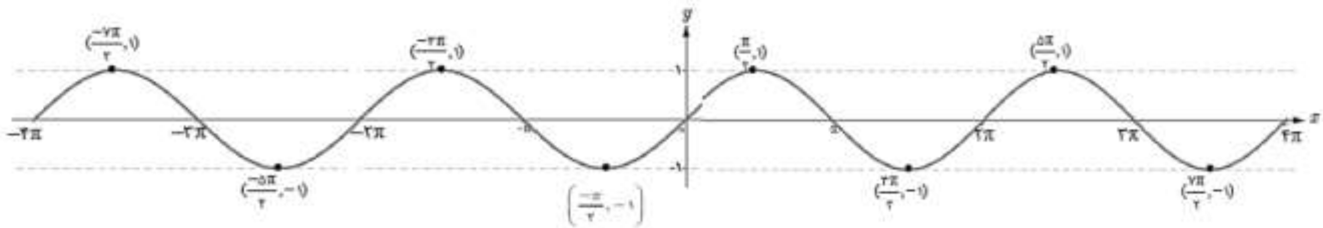
در نتیجه $d=-۱$ و تابع و تابع مشتق به ترتیب به صورت $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱$ و $f'(x)=۶x^۲-۶x$ می‌باشند. از معادلهٔ $f'(x)=۰$ نقطهٔ اکسترمم بعدی که $(۰,-۱)$ است به‌دست می‌آید. با توجه به آزمون مشتق اول (صفحهٔ ۱۰۸) و تعیین علامت تابع مشتق، نقطهٔ $(۰,-۱)$ ماکزیمم نسبی تابع f است.

۴ **فصل اول درس ۱، مشابه کار در کلاس صفحه ۹**

نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ به صورت مقابل است:

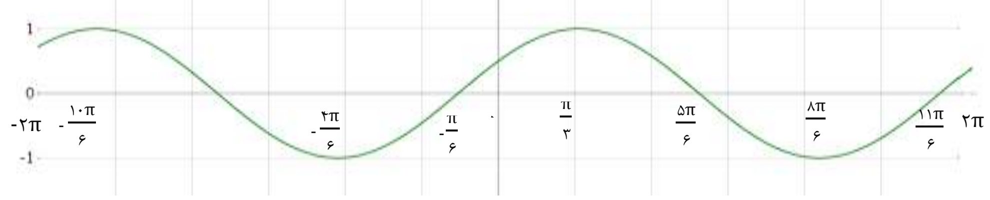


چنانچه مشاهده می‌کنید تابع در بازه‌های $[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$، $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ صعودی اکید و در بازه‌های $[-\frac{۳\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ نزولی اکید می‌باشد (توجه کنیم که اگر نمودار تابع را ادامه دهیم، تابع در بازهٔ $[\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}]$ صعودی اکید خواهد بود). در حالت کلی و با تکرار این تناوب‌ها نمودار زیر را خواهیم داشت:



که تابع در بازه‌های $[\frac{(۲k-۱)\pi}{۲},\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}]$ به ازای $k\in\mathbb{Z}$های زوج اکیداً صعودی و در بازه‌های $[\frac{(۲k-۱)\pi}{۲},\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}]$ به ازای $k\in\mathbb{Z}$های فرد اکیداً نزولی می‌باشد.

در این سؤال کافی است نمودار فوق را در راستای محور طول‌ها $\frac{\pi}{۶}$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا به نمودار تابع $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ برسیم:



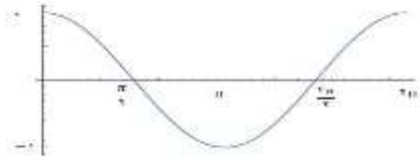
لذا تابع $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ با دامنهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ در بازه‌های $[-\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶},-\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}]=[-\frac{۱۰\pi}{۶},-\frac{۴\pi}{۶}]$ و $[\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}]=[\frac{\pi}{۳},\frac{۸\pi}{۶}]$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $[-۲\pi,-\frac{۱۰\pi}{۶}]$، $[-\frac{۴\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}]$ و $[\frac{۸\pi}{۶},۲\pi]$ اکیداً صعودی است.

۱

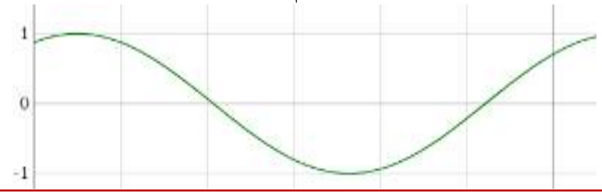
مثال ۷: نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ را به کمک نمودار $y=\cos(x)$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

(امتحان نهایی حسابان خرداد ۱۴۰۰–۰/۷۵ نمره)

حل: این سؤال نیز مانند کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب است. نمودار تابع $y=\cos(x)$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ به صورت مقابل است:



باتوجه به توضیحات داده شده کافی است نمودار تابع $y=\cos(x)$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال دهیم.



۵

فصل دوم درس ۲

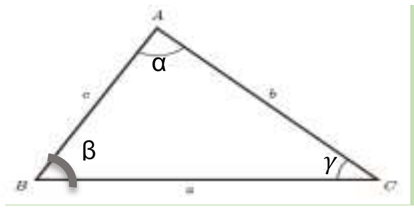
رابطه‌ای که در قسمت راهنمایی سؤال به آن اشاره شده را قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نامیم. در حالت کلی:

قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$



در میان سه عدد داده شده $2\sqrt{13}$ از همه بزرگتر است ($2\sqrt{13}>2(3)\Leftarrow\sqrt{13}>\sqrt{9}=3$). فرض کنیم بزرگ‌ترین ضلع مثلث $BC=a$ (فرقی نمی کند کدام طول ضلع a، b یا c را بزرگترین طول ضلع در نظر بگیریم. چنین فرض‌هایی در ریاضی را فرض بدون کاستن از کلیت می گوییم) و زاویهٔ روبه‌روی آن $\widehat{BAC}=\widehat{\alpha}$ باشد، در این صورت:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Rightarrow(2\sqrt{13})^2=2^2+6^2-2(2)(6)\cos\alpha=4+36-24\cos\alpha\Rightarrow52=40-24\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

چون $\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$، جواب‌های کلی معادلهٔ فوق برابر است با $\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ($k\in\mathbb{Z}$). چون α زاویهٔ یک مثلث است پس جواب $\alpha=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ قابل قبول است.

مثال ۱۵: مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ (امتحانات نهایی ریاضی ۳ شهریور ۱۴۰۰-۱ نمره)

حل (مشابه سؤال ۴ صفحهٔ ۴۸): با توجه به فرمول مساحت مثلث که در ریاضی دهم خواندیم:

$$\frac{1}{2}\times4\times8\sin x=8\sqrt{2}\Rightarrow\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=45^\circ,135^\circ$$

۱/۲۵

۶

الف) فصل سوم درس ۱. $-\frac{1}{8}$

با جایگذاری عدد ۳ در حد مورد نظر، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. صورت حاصل‌جمع (تفریق) دو عبارت (رادیکالی) می‌باشد. پس ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج صورت می‌تواند باعث حذف عامل صفر شونده $(x-3)$ گردد.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{x^2-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4(x-2)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to3}\frac{-3(x-3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2})}=\frac{-3}{24}=\frac{-1}{8}$$

ب) فصل سوم درس ۲. $\frac{1}{3}$

در صفحهٔ ۶۳ از کتاب درسی خواندیم که اگر f تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ $n\in\mathbb{N}$ به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+...+k$ ($0\neq a\in\mathbb{R}$) باشد، در این صورت $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^n$. بنابراین: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

پ) فصل سوم درس ۱. $-\infty$

چون حد راست در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ مورد نظر است، پس انتهای کمان‌هایی که به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کنند در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع هستند (مقدارهای x کمی بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ باید باشند). در ربع دوم مقدار تابع cos منفی است، لذا: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$.

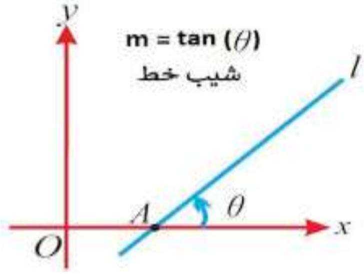
۱/۵

۷

فصل چهارم درس ۱، تمرین ۴ صفحهٔ ۷۵.

در سال‌های قبل خواندیم که شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویهٔ ایجاد شده بین آن خط و جهت مثبت محور xها. با توجه به خواص تانژانت، اگر زاویهٔ ایجاد شده تند باشد شیب خط مثبت و اگر زاویهٔ ایجاد شده باز باشد شیب ایجاد شده منفی خواهد بود.

۱



برای سایر توابع، شیب نمودار تابع در نقطه‌ای مشخص روی نمودار را، شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه حساب می‌کنیم.

در این سؤال شیب مماس بر تابع در نقطه‌های b و c مثبت، در d صفر و در نقطه‌های a و e منفی است. لذا جدول به صورت زیر خواهد بود:

شیب	۲	۰/۵	-۰/۵	-۲
نقطه	c	b	a	e

---

۸ — بارم: ۱/۷۵

فصل چهارم درس ۲، مشابه تمرین ۳ صفحه ۹۰.

الف) چون تابع دو ضابطه‌ای است، پس مشتق‌های یک طرفهٔ تابع در نقطهٔ $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{4x-2-(4(2)-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2-(2^2+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

چون مشتق چپ و راست با هم برابر هستند، پس تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است و $f'(2)=4$.

ب) در قسمت قبل دیدیم که تابع در نقطهٔ انفصال دو ضابطه ($x=2$) مشتق‌پذیر است. دو ضابطهٔ داده شده نیز چون توابعی چندجمله‌ای هستند، پس تابع f در کل دامنهٔ خود ($\mathbb{R}$) مشتق‌پذیر خواهد بود و می‌توانیم از فرمول‌های مشتق استفاده کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x\geq 2\\ 4 & x<2\end{cases}$$

---

۹ — بارم: ۱/۲۵

فصل چهارم درس ۲

الف) در صفحهٔ ۸۸ مشتق تابع زنجیری را به صورت زیر خواندیم: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی بر حسب x باشد، آن‌گاه مشتق تابع $y=f(u)$ برابر است با $y'=u'f'(u)$. در این سؤال اگر قرار دهیم: $u=\frac{x^2-4}{5x}$، آن‌گاه u' را با قاعدهٔ مشتق تقسیم توابع به دست می‌آوریم:

$$u'=\frac{2x(5x)-5(x^2-4)}{(5x)^2}=\frac{10x^2-5x^2+20}{25x^2}=\frac{5x^2+20}{25x^2}=\frac{x^2+4}{5x^2}$$

صورت سؤال به شکل $y=u^5$ در می‌آید. با توجه به یادآوری بالا داریم:

$$y'=u'f'(u)=5\frac{x^2+4}{5x^2}\left(\frac{x^2-4}{5x}\right)^4$$

ب) با توجه به قاعدهٔ ضرب توابع داریم:

$$f'(x)=(\sqrt{x})'(3x^3-4)+\sqrt{x}(3x^3-4)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^3-4)+\sqrt{x}(9x^2-0)=\frac{3x^3-4}{2\sqrt{x}}+9x^2\sqrt{x}$$

---

۱۰ — بارم: ۱

فصل چهارم درس ۳

الف) با توجه به فرمول، سرعت متوسط برابر است با:

$$\frac{h(3)-h(1)}{3-1}=\frac{-9+30+1-10}{2}=\frac{12}{2}=6$$

ب) برای محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای از مشتق تابع ارتفاع استفاده می‌کنیم:

$$h'(t)=-2t+10\Rightarrow -2t+10=8\Rightarrow t=1$$

---

۱۱ — بارم: ۱/۵

فصل پنجم درس ۱

با توجه به قضیهٔ زیر (ص ۱۱۱) مطمئن هستیم که تابع f در بازهٔ $[0,4]$ اکسترمم مطلق دارد.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به صورت زیر است:

«۱. مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲. مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳. بزرگ‌ترین مقدار به‌دست آمده در مرحلهٔ ۲ ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین مقدار مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.»

برای حل مسأله طبق مراحل فوق پیش می‌رویم:

$$f'(x)=3x^2-27=0\Rightarrow x=\pm 3$$

فقط نقطهٔ $x=3$ در بازهٔ $[0,4]$ قرار دارد. حال آماده‌ایم وارد مرحلهٔ دوم شویم:

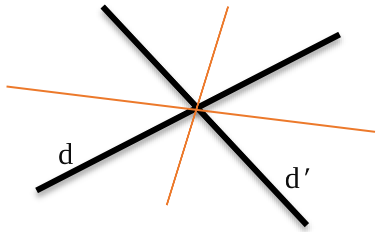
$f(3)=27-81=-54$، $f(0)=0-0=0$ و $f(4)=64-108=-44$

بنابراین -54 مینیمم مطلق تابع و 0 ماکزیمم مطلق تابع در بازهٔ $[0,4]$ است.

---

۱۲ — بارم: ۱

فصل پنجم درس ۲

	تابع حاصل‌ضرب برابر است با: $p=xy=x(4x-16)=4x^2-16x$. $p'(x)=8x-16=0\Rightarrow x=2\Rightarrow y=-8$	
۱۳	**فصل ششم درس ۱** این دو خط متقاطع را مانند دو زاویهٔ متقابل به رأس می‌توانیم تصور کنیم. در صفحه ۳۶ کتاب خواندیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو رأس یک زاویه به یک فاصله باشد نیمساز آن زاویه خواهد بود. لذا مکان هندسی مورد نظر دو نیمساز بین دو خط d و d' می‌باشد:  	۰/۵

۱۴	**فصل ششم درس ۲**	۱/۷۵

معادلهٔ دایره در حالت‌های مختلف:

معادلهٔ دایره مشخص است اگر و تنها اگر مختصات مرکز و طول شعاع دایره معلوم باشد. در بعضی از مسائل مختصات مرکز و یا طول شعاع دایره را درونِ مفروضات دیگری مستتر کرده‌اند. مهمترینِ این حالت‌ها عبارتند از:

۱. معادلهٔ دایره‌ای که نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و نقطهٔ $M(a,b)$ روی دایره قرار گرفته باشد (طول شعاع مستتر است):

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2$$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که نقطهٔ $O(-2,-1)$ مرکز دایره و $M(1,1)$ نقطه‌ای روی دایره باشد.

حل:

$$r=OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(1-(-2))^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

لذا معادلهٔ دایره به صورت $(x+2)^2+(y+1)^2=13$ است.

۲. معادلهٔ دایره‌ای که نقطه‌های A و B دو سر قطر دایره باشند (هم مختصات مرکز و هم طول شعاع مستتر است):

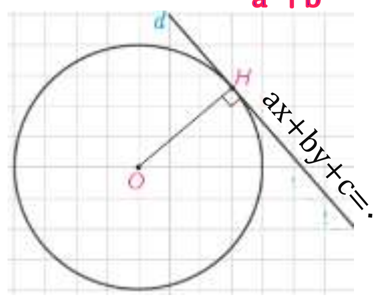
$$O=\frac{A+B}{2},\quad r=\frac{\overline{AB}}{2}$$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای که نقاط $A(3,1)$ و $B(1,0)$ دو سر قطر آن باشد کدام است؟

حل: $O\left(\frac{3+1}{2},\frac{1+0}{2}\right)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$ و $R=\frac{\sqrt{(1-3)^2+(0-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. لذا: $(x-2)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$.

۳. معادلهٔ دایره‌ای که نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و بر خط $ax+by+c=0$ مماس باشد (طول شعاع مستتر است):

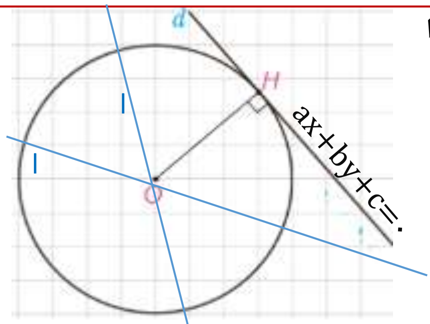
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{(a\alpha+b\beta+c)^2}{a^2+b^2}$$



مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(3,1)$ باشد و بر خط به معادلهٔ $4x+3y+5=0$ مماس باشد. (امتحان نهایی شهریور ۹۹- ۱/۲۵ نمره)

حل: فاصلهٔ مرکز از خط برابر است با: $r=\frac{|4(3)+3(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$. لذا معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-3)^2+(y-1)^2=16$.

۴. معادلهٔ دایره‌ای که خط‌های l و l' شامل قطرهایی از آن باشند و بر خط $ax+by+c=0$ مماس باشد (هم مختصات مرکز و هم طول شعاع مستتر است):



محل تقاطع دو خط l و l' را $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره می‌نامیم. مسأله به حالت ۳ بر می‌گردد. لذا معادلهٔ دایره برابر خواهد بود با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\frac{(a\alpha+b\beta+c)^۲}{a^۲+b^۲}$$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن باشند و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

(امتحان نهایی خرداد ۹۸- ۱/۵ نمره)

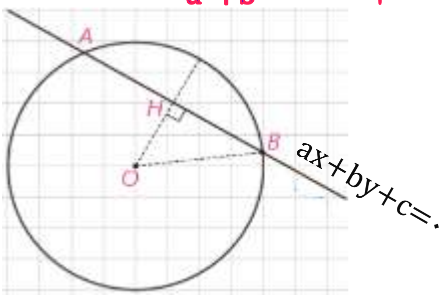
حل: ابتدا نقطه برخورد دو خط را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{x=y+۳} y+۳+y=۱\Rightarrow y=-۱\Rightarrow x=۲\Rightarrow O(۲,-۱)$$

فاصلهٔ مرکز از خط برابر است با: $r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$. لذا معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$.

۵. معادلهٔ دایره‌ای که نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و بر خط $ax+by+c=۰$ وتر AB را جدا می‌کند (طول شعاع مستتر است):

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\frac{(a\alpha+b\beta+c)^۲}{a^۲+b^۲}+(\frac{AB}{۲})^۲$$



مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-۱,-۱)$ باشد و بر خط به معادلهٔ $۴x+۳y+۵=۰$ وتری به طول ۴ جدا کند.

(امتحان نهایی خرداد ۹۹- ۱/۲۵ نمره)

حل: فاصلهٔ مرکز از خط برابر است با: $r=\frac{|۴(۳)+۳(۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$. لذا معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱۶$.

۶. معادلهٔ دایره‌ای که از دو نقطهٔ A و B عبور می‌کند و خط $ax+by+c=۰$ شامل قطری از آن باشد. (هم مرکز دایره و هم طول شعاع مستتر است):

مرکز دایره چون روی خط $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ قرار دارد پس به صورت $O(\alpha,-\frac{a}{b}\alpha-\frac{c}{b})$ پارامتری می‌کنیم و از معادلهٔ $OA=OB$، α را می‌یابیم.

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و خط $y=۲x-۱$ شامل یکی از قطرهای آن باشد.

حل: مرکز دایره به صورت $O(\alpha,۲\alpha-۱)$ است. چون $r=OA=OB$، پس: $\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱-۲)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱-۰)^۲}$

$$\Rightarrow(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۳)^۲=(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲$$

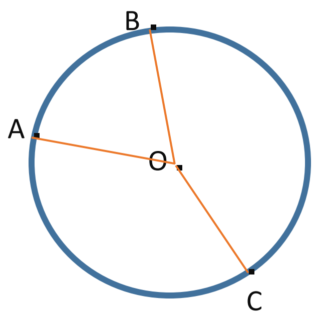
$$\Rightarrow ۵\alpha^۲-۱۴\alpha+۱۰=۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰\Rightarrow\alpha=۰,\ O(۰,-۱)$$

لذا $r=OA=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۲(۰)-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$ و معادلهٔ دایره برابر است با: $x^۲+(y+۱)^۲=۱۰$.

۷. معادلهٔ دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و C عبور می‌کند (هم مرکز دایره و هم طول شعاع مستتر است):

روش الف: فرض می‌کنیم $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد. با توجه به رابطهٔ $OA=OB=OC=r$ دو معادله بر حسب α و β تشکیل می‌دهیم و این مقادیر را به دست می‌آوریم.

روش ب: سه نقطه را در معادلهٔ ضمنی دایره $(x^۲+y^۲+ax+by+c=۰)$ قرار می‌دهیم و a، b و c را به دست می‌آوریم.



در این مسأله (که شبیه به کار در کلاس صفحهٔ ۴۳ می‌باشد) با حالت ۵ از حالت‌های بیان شدهٔ فوق روبرو هستیم. فاصلهٔ مرکز $O(۱,-۱)$ از خط به معادلهٔ $۲x+y-۲=۰$ (یعنی OH) برابر است با $OH=\frac{|۲(۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره برابر است با:

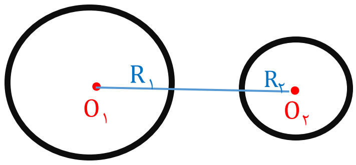
$$r^{۲}=\frac{(a\alpha+b\beta+c)^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}+(\frac{AB}{۲})^{۲}=(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}+(\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

لذا معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=\frac{۴}{۵}$.

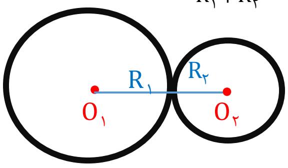
۱۵ **فصل ششم درس ۲**

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

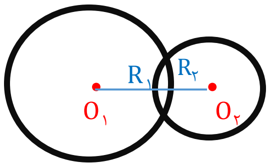
۱. دو دایره متخارج‌اند اگر و تنها اگر $O_{۱}O_{۲}>R_{۱}+R_{۲}$.



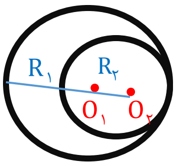
۲. دو دایره مماس خارج‌اند اگر و تنها اگر $O_{۱}O_{۲}=R_{۱}+R_{۲}$. در این حالت مختصات نقطهٔ تماس از رابطهٔ $A=\frac{R_{۱}O_{۲}+R_{۲}O_{۱}}{R_{۱}+R_{۲}}$ به دست می‌آیند.



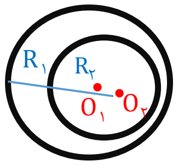
۳. دو دایره متقاطع‌اند اگر و تنها اگر $|R_{۱}-R_{۲}|<O_{۱}O_{۲}<R_{۱}+R_{۲}$.



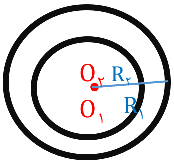
۴. دو دایره مماس داخل‌اند اگر و تنها اگر $O_{۱}O_{۲}=|R_{۱}-R_{۲}|$.



۵. دو دایره متداخل‌اند اگر و تنها اگر $O_{۱}O_{۲}<|R_{۱}-R_{۲}|$.



۶. دو دایره هم مرکز هستند اگر و تنها اگر $O_{۱}O_{۲}=۰$. حالت ۶ در واقع حالت خاصی از ۵ است.



در این سؤال معادلهٔ استاندارد دایرهٔ اول به صورت زیر است:

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x+۲y=۴ \Rightarrow (x^{۲}-۴x+۴)+(y^{۲}+۲y+۱)=۴+۱+۴ \Rightarrow (x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۹ \Rightarrow O'(۲\,,-۱),\ r=۳$$

و در دایرهٔ دوم داریم: $(x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴ \Rightarrow O(۱,-۱),\ r=۲$. با توجه به آن‌چه توضیح دادیم:

$$d=OO'=\sqrt{(x_{۲}-x_{۱})^{۲}+(y_{۲}-y_{۱})^{۲}} \Rightarrow d=\sqrt{(۲-۱)^{۲}+(-۱+۱)^{۲}} \Rightarrow d=۱$$

چون $d=r-r'$ می‌باشد به عبارتی $۳-۲=۱$ بنابراین دو دایره مماس درون می‌باشند.

۱۶ **فصل هفتم**

$$P(A)=P(B_{۱})P(A|B_{۱})+P(B_{۲})P(A|B_{۲})=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۳}+\frac{۷}{۲۲}=\frac{۴۱}{۶۶}$$ ۲

موسسه فرهنگی- آموزشی ژیوار

کیفیت آموزشی، عدالت آموزشی، تعمق یادگیری

کیفیت تنها تبلیغات ژیوار است

ردیف	گروه علمی	نوع فعالیت	شروع	پایه	اینستاگرام و واتساپ
۱	سانا	امتحانات آخرسال و شبه‌نهایی	۱۳۹۸	هفتم تا دوازدهم	saanaa.azmoon ۰۹۹۱۳۳۸۸۷۳۶
۲	اوج	آزمون‌های تستی و کنکور	۱۳۹۲	هفتم تا دوازدهم	ovj_azmoon ۰۹۹۱۳۳۸۸۷۵۶
۳	افق	آزمون‌های تیزهوشان	۱۳۹۷	ششم و نهم	tizhooshan.ofogh ۰۹۹۱۳۳۸۸۵۷۹
۴	ایتوک	مشاوره	۱۳۹۳	هفتم تا دوازدهم	eytook_academy ۰۹۱۹۴۵۶۶۲۹۹
۵	کودکان	سنجش ضرایب هوشی چندگانه من و ریاضیات چرتکه پوشه کار	۱۳۹۴	پیش‌دبستان و ابتدایی	tja_koodak ۰۹۱۹۴۵۶۶۵۶۲

پاسخ تشریحی امتحان شبه نهایی دوازدهم تجربی (ریاضی ۳) بوشهر   تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱/۲۰   احسان تقی زاده

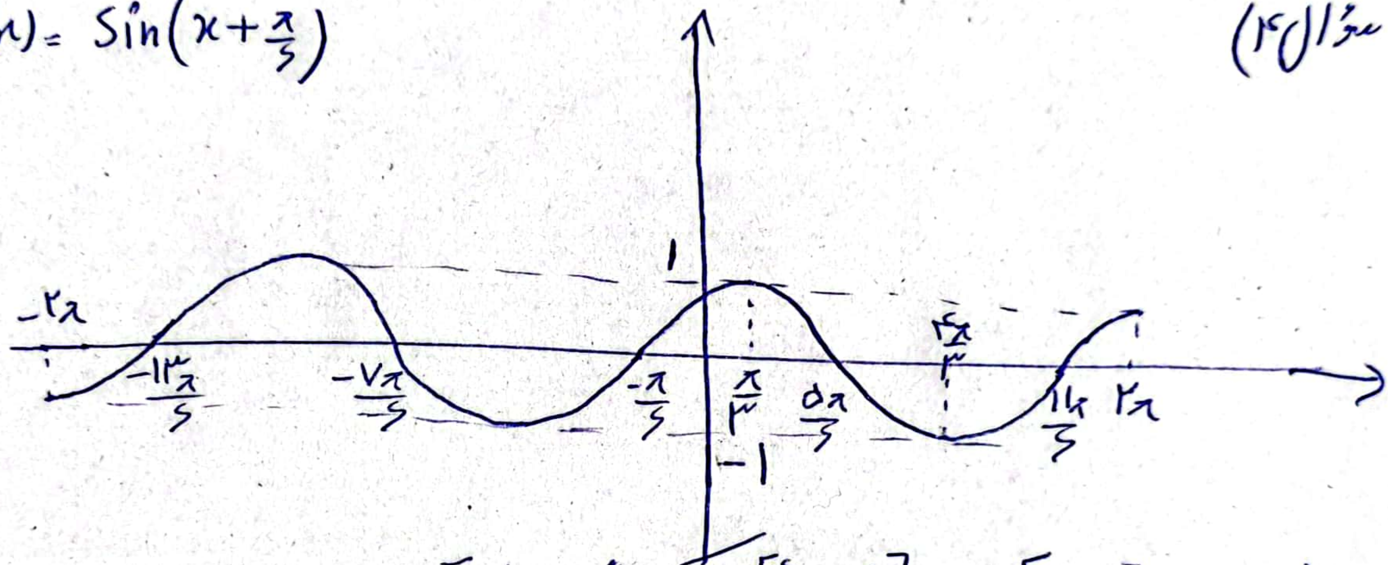
سؤال ۱) الف) درست   ب) نادرست   ج) نادرست

سؤال ۲) الف) $g(x) = x^2 - 6x + 9$ ب) $y = x$ ج) سمی

سؤال ۳) I) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ II) $-\infty$ و $+\infty$ III) $(0,-1)$ مانزیمم نسبی

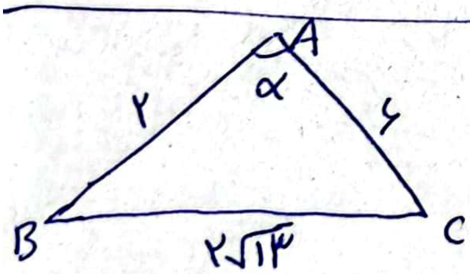
سؤال ۴)

$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$



در بازه های $[0, \frac{\pi}{3}]$ و $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.

سؤال ۵)



$$(2\sqrt{13})^2 = 2^2 + 6^2 - 2\times2\times6\times\cos\alpha$$

$$52 = 40 - 24\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

سؤال ۶) الف)

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim\frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{(x-3)(x+3)}\times\frac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(x+1)-4(x-2)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to3}\frac{-3\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{-3}{6(2+2)} = \frac{-3}{24} = -\frac{1}{8}$$

ادامه سوال ۶)

ب) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{3x^2-2x-1} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

سوال ۷)

c = نقطه ← ۲ = شیب

e = نقطه ← (۲-) = شیب

b = نقطه ← (۰٫۵) = شیب

a = نقطه ← (۰٫۵-) = شیب

سوال ۸) تابع f در $x=2$ مشتق پذیر است ←

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} x^2+2 = 4+2=6 \\ \lim_{x\to 2^-} 4x-2 = 8-2=6 \end{cases} \qquad f'_+(2)=4 \quad f'_-(2)=4$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 2 \\ 4 & x<2 \end{cases}$$

سوال ۹)

الف) $f'(x) = 5\left(\frac{x^2-4}{5x}\right)^4 \times \left(\frac{2x(5x)-5(x^2-4)}{(5x)^2}\right)$

ب) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^3-4) + 9x^2(\sqrt{x})$

سوال ۱۰)

الف) $\bar{v} = \frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{(-9+30)-(-1+10)}{2} = \frac{21-9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

ب) $h'(t) = -2t+10 = 8 \rightarrow -2t = -2 \rightarrow t=1$

سوال ۱۱)

$f'(x) = 3x^2-27 = 0 \rightarrow 3(x^2-9) = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$f(0) = 0 \rightarrow$ max مطلق

$f(4) = 64-108 = -44$

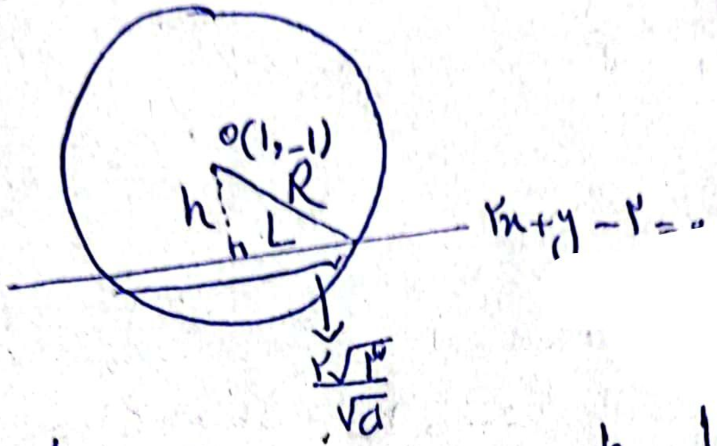
$f(3) = 27-81 = -54 \rightarrow$ min مطلق

سوال ۱۲)

$S = xy \xrightarrow{y=4x-16} S = x(4x-16) = 4x^2-16x$

$\rightarrow S' = 8x-16 = 0 \rightarrow x=2,\ y = 4(2)-16 = 8-16 = -8$

سؤال ۱۴)



$$h=\frac{|2\times1+(-1)\times1-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$L=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$R^2=h^2+L^2\longrightarrow R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\longrightarrow R=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

معادله‌ی دایره : $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{4}{5}$

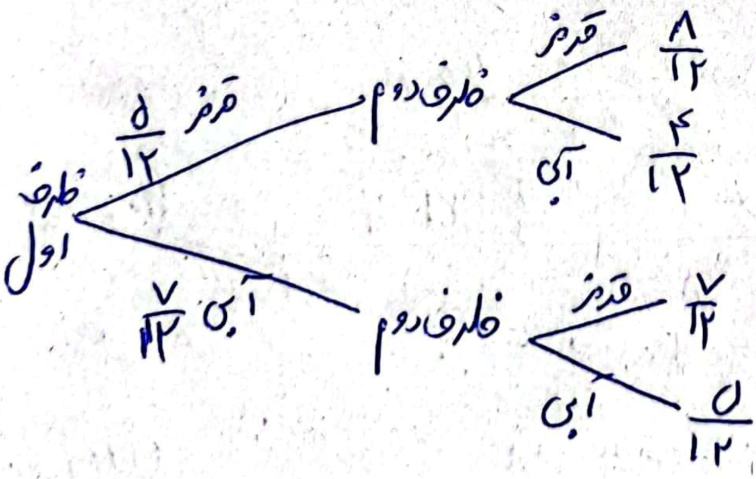
سؤال ۱۵)

دایره‌ی ① $\begin{cases} O_1(1,-1) \\ R_1=2 \end{cases}$ دایره‌ی ② $\begin{cases} O_2(2,-1) \\ R_2=3 \end{cases}$

$O_1O_2=\sqrt{(1-2)^2+(-1+1)^2}=1$ و $|R_2-R_1|=3-2=1$

$\longrightarrow O_1O_2=|R_2-R_1| \longrightarrow$ مماس داخل

سؤال ۱۶)



$$P(\text{قرمز})=\frac{5}{12}\times\frac{8}{12}+\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}$$

$$=\frac{40}{144}+\frac{49}{144}=\frac{89}{144}$$