

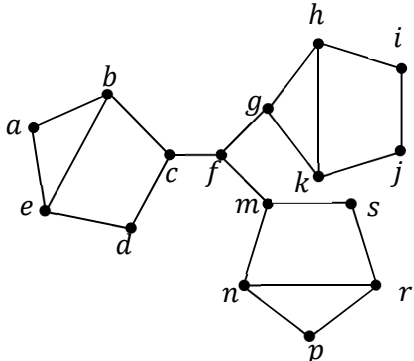
محل مهر آموزشگاه		بسمه تعالی اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری		نام و نام خانوادگی: نام منطقه/ناحیه: نام دبیرستان: نام دبیر:	
تعداد صفحات: ۲	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک		آزمون شبه نهایی درس: ریاضیات گسسته	
شماره کلاس:	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱/۲۶		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	
بارم	دانش آموزان گرامی سوالات در ۲ صفحه و شامل ۱۴ سوال می باشد.				ردیف
۰/۵	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید: الف) عدد احاطه گری گراف $K_6$ برابر است. ب) اگر $n$ عدد اول باشد، آنگاه $2^n + 1$ نیز عددی اول است.				۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید: الف) باقی مانده تقسیم عدد $437956$ بر $11$ برابر با ..... است. ب) معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ در عددهای صحیح نامنفی دارای ..... جواب است.				۲
۱	در هر سوال گزینه صحیح را انتخاب کنید: ۱-۳) رقم یکان عدد $(2! + 4! + \dots + 26!)(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)$ کدام است؟ الف) ۲      ب) ۳      ج) ۵      د) ۸ ۲-۳) در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار $n$ به گونه ای که مطمئن باشیم حداقل $n$ نفر دارای ماه تولد یکسان هستند، کدام است؟ الف) ۵      ب) ۶      ج) ۷      د) ۸				۳
۱/۵	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ ، $n^2 - 5n + 8$ عددی زوج است.				۴
۱/۲۵	برای هر سه عدد حقیقی $x$ ، $y$ و $z$ درستی نامساوی زیر را به کمک اثبات بار گشتی بررسی کنید. $x^2 + 4y^2 + z^2 \geq 4x - 4y - 2z - 6$				۵
۱/۵	اگر $a$ عددی صحیح و فرد باشد و $b a + 2$ ، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a^2 + b^2 + 5$ بر $8$ را بیابید.				۶
۱/۵	معادله هم نهشتی $83x \equiv 25 \pmod{3}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را بدست آورید.				۷

محل مهر آموزشگاه		بسمه تعالی <b>اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی</b> اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری		نام و نام خانوادگی: نام منطقه/ناحیه: نام دبیرستان: نام دبیر:	
تعداد صفحات: ۲	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک		آزمون شبه نهایی درس: ریاضیات گسسته	
شماره کلاس:	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱/۲۶		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	
۱/۷۵		<p>۸</p> <p>گراف مقابل را در نظر گرفته و به سوال های زیر پاسخ دهید:</p> <p>الف) درجه رأس <math>a</math> در گراف مکمل چند است؟</p> <p>ب) دو مسیر متفاوت از <math>a</math> به <math>e</math> نوشته و طول هر کدام را مشخص کنید؟</p> <p>پ) گراف مکمل را رسم کنید.</p>			
۱ ۱	<p>۹</p> <p>به سوالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید:</p> <p>الف) فرض کنید <math>G</math> گرافی از مرتبه ۱۱ و اندازه ۵۱ باشد گراف <math>G</math> حداقل چند رأس از درجه ماکزیمم دارد؟</p> <p>ب) به یک گراف <math>5-</math> منتظم از مرتبه ۱۲ چند یال اضافه کنیم تا به گرافی کامل تبدیل شود؟</p>				
۲		<p>۱۰</p> <p>عدد احاطه گرای گراف مقابل را با ذکر راه حل تعیین کنید.</p>			
۱/۲۵	<p>۱۱</p> <p>فرض کنید <math>A</math> یک مربع لاتین از مرتبه ۴ باشد. به چند طریق می توان دو خانه از <math>A</math> را انتخاب کرد که مجموع عددهای این دو خانه برابر ۴ باشد؟</p>				
۱/۵	<p>۱۲</p> <p>به چند طریق می توان هشت توپ یکسان را در پنج جعبه مختلف قرارداد به طوری که دقیقاً دو جعبه خالی بماند؟</p>				
۱/۵	<p>۱۳</p> <p>در بین عددهای طبیعی ۱ تا ۳۰۰ (<math>1 \leq n \leq 300</math>) چند عدد وجود دارد که بر ۵ بخش پذیر باشند ولی بر ۳ بخش پذیر نباشند؟</p>				
۱/۷۵	<p>۱۴</p> <p>چند تابع پوشا از مجموعه <math>A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 5 \text{ و } 4 \text{ و } 7\}</math> به روی مجموعه <math>B = \{3 \text{ و } 6 \text{ و } 9\}</math> وجود دارد که شامل زوج مرتب <math>(3 \text{ و } 5)</math> باشند؟</p>				

نام درس : ریاضیات گسسته		بسمه تعالی	راهنمای تصحیح
تاریخ : ۱۴۰۲/۰۱/۲۶		اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی	
نوبت : شبه نهایی		اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری شبه نهایی پایه دوازدهم	
بارم	همکاران گرامی پاسخ سوالات در ۴ صفحه می باشد .		ردیف
۰/۵	<p>الف) درست زیرا گراف <math>K_6</math> یک گراف کامل از مرتبه ۶ می باشد، پس هر رأس به ۵ رأس دیگر متصل است، بنابراین در این گراف عدد احاطه گری ۱ می باشد.</p> <p>ب) نادرست زیرا با یک مثال نقض می توان نادرستی این رابطه را ثابت کرد، زیر با قرار دادن عدد ۳ به جای <math>n</math> خواهیم داشت <math>2^3 + 1 = 9</math> که عدد اول نیست</p>		۱
۱	<p>الف) چون <math>2 &lt; 11</math> است پس باقی مانده تقسیم همان ۲ است</p> $437965 \equiv 6 - 5 + 9 - 7 + 3 - 4 \equiv 2$ <p>ب) <math>x_1 + x_2 + x_3 = 11</math> و <math>n = 1</math> و <math>k = 3 \Rightarrow</math> تعداد جواب ها <math>= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78</math></p>		۲
۱	<p>۱-۳) گزینه الف: زیرا می دانیم <math>10 \equiv 0 \pmod{n!}</math> و <math>n \geq 5</math> پس:</p> $\left( \binom{1!}{1} + \binom{3!}{6} + \binom{5!}{0} + \dots + \binom{25!}{0} \right) \left( \binom{2!}{2} + \binom{4!}{24} + \binom{6!}{0} + \dots + \binom{26!}{0} \right) \equiv \binom{10}{6} \binom{26}{6} \equiv 42 \equiv 2 \pmod{7}$ <p>۲-۳) گزینه ب زیرا از آن جایی که تعداد ماه های سال (تعداد لانه ها)، برابر ۱۲ است؛ پس طبق اصل لانه کبوتری، جواب عبارت است:</p> $\begin{array}{r} 65 \overline{) 12} \\ 60 \quad 5 \quad \rightarrow 5 + 1 = 6 \\ \hline 5 \end{array}$		۳
۱/۵	<p><math>n = 2k \Rightarrow A = n^2 - 5n + 8 = (2k)^2 - 5(2k) + 8 = 4k^2 - 10k + 8 = 2(2k^2 - 5k + 4) = 2q</math> پس <math>A</math> زوج است. <span style="float:right">۰/۲۵</span></p> <p><math>n = 2k - 1 \Rightarrow A = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 8 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 8 = 4k^2 - 14k + 14 = 2(2k^2 - 7k + 7) = 2q'</math> پس <math>A</math> زوج است. <span style="float:right">۰/۲۵</span></p>		۴
۱/۲۵	<p><math>x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) + (z^2 + 2z + 1) \geq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (2y + 1)^2 + (z + 1)^2 \geq 0</math></p> <p>نامساوی مقابل همواره برقرار بوده و طبق برگشت پذیر بودن این روابط حکم مسأله ثابت است <span style="float:right">۰/۲۵</span></p>		۵

نام درس : ریاضیات گسسته		بسمه تعالی		راهنمای تصحیح
تاریخ : ۱۴۰۲/۰۱/۲۶		اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی		
نوبت : شبه نهایی		اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری		
		شبه نهایی پایه دوازدهم		
۱/۵	چون $a$ فرد است، $(۰/۲۵)$ پس $a + 2$ نیز فرد می باشد و با توجه به اینکه $a + 2$ بر $b$ بخش پذیر است بنابراین $b$ نیز عددی فرد است، $(۰/۲۵)$ زیرا عدد فرد $a + 2$ بر عدد زوج $b$ نمی تواند بخش پذیر باشد. از طرفی می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است، پس داریم: $(۰/۵)$			۶
	$a^2 = 8q + 1$ و $b^2 = 8q' + 1$ و $2a^2 + b^2 + 5 = 2(8q + 1) + 8q' + 1 + 5 = 16q + 2 + 8q' + 6$			
	$= 16 + 8q' + 8 = 8(2q + q' + 1) = 8k \rightarrow$ صفر = باقی مانده			
۱/۵	$83x \equiv 25 \Rightarrow (83 - 27 \times 3)x \equiv 25 - 3(7) \Rightarrow 2x \equiv 4 \xrightarrow{(2,3)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x - 2 = 3k$			۷
	$\Rightarrow x = 3k + 2$			
۱/۲۵	$deg_G(a) + deg_{\bar{G}}(a) = p - 1 \Rightarrow 3 + deg_{\bar{G}}(a) = 6 - 1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(a) = 2$		(الف)	۸
	$afe \rightarrow 2 =$ طول مسیر و $acbe \rightarrow 3 =$ طول مسیر		(ب)	
			(پ)	
۱	الف) اندازه گراف کامل از مرتبه ۱۱ برابر $\binom{11}{2} = 55$ است بنابراین $G$ با حذف چهار یال از گراف $K_{11}$ به دست می آید. $(۰/۲۵)$ درجه همه رأس ها در $K_{11}$ برابر ۱۰ است حذف چهار یال حداکثر هشت رأس از گراف را می تواند کم کند، $(۰/۲۵)$ بنابراین $G$ حداقل سه رأس درجه ۱۰ دارد. $(۰/۲۵)$			۹
۱	ب) اندازه گراف $5 -$ منتظم از مرتبه ۱۲ برابر $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ و اندازه گیری کامل از مرتبه ۱۲ برابر $\binom{12}{2} = 66$ است. بنابراین پاسخ برابر $66 - 30 = 36$ است. $(۰/۲۵)$			

نام درس : ریاضیات گسسته	بسمه تعالی	<h1>راهنمای تصحیح</h1>
تاریخ : ۱۴۰۲/۰۱/۲۶	اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی	
نوبت : شبه نهایی	اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری شبه نهایی پایه دوازدهم	

۲	 <p style="text-align: center;"><math>n = 16</math> و <math>\Delta = 3 \Rightarrow Y \geq \left\lceil \frac{16}{3+1} \right\rceil \Rightarrow Y \geq 4</math></p> <p style="text-align: center;">۰/۲۵      ۰/۲۵      ۰/۲۵</p> <p>از بین رأس های <math>a, b, c, d, e</math> و <math>f</math> حداقل دو رأس باید انتخاب شود. از بین رأس های <math>g, h, i, j, k</math> و <math>l</math> حداقل دو رأس باید انتخاب شود. از بین رأس های <math>m, n, o, p, r, s</math> نیز حداقل دو رأس انتخاب شود. پس داریم: <math>r \geq 6</math> (۰/۷۵) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">I</span></p> <p style="text-align: center;"><math>\{c \text{ و } e \text{ و } k \text{ و } i \text{ و } n \text{ و } s\} \Rightarrow r \leq 6 \xrightarrow{I} r = 6</math>      ۰/۲۵</p> <p style="text-align: center;">۰/۲۵</p>	۱۰
۱/۲۵	<p>در مربع لاتین <math>A</math> هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴؛ چهار بار ظاهر شده اند بنابراین برای انتخاب دو خانه از <math>A</math> که مجموع آن ها برابر ۴ باشد، باید دو خانه شامل عدد ۲ یا دو خانه شامل عددهای ۱ و ۳ را انتخاب کنیم در نتیجه پاسخ برابر است با:</p> <p style="text-align: center;"><math>\binom{4}{2} + \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 6 + 4 \times 4 = 6 + 16 = 22</math>      ۰/۲۵</p> <p style="text-align: center;">←—————→ 1</p>	۱۱
۱/۵	<p>ابتدا دو تا از پنج جعبه را انتخاب و کنار می گذاریم. تعداد راه های توزیع هشت توپ در سه جعبه باقی مانده به طوری که در هر کدام حداقل یک توپ قرار بگیرد برابر تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله <math>x_1 + x_2 + x_3 = 8</math> یعنی برابر <math>\binom{7}{2}</math> است در نتیجه پاسخ برابر است با</p> <p style="text-align: center;"><math>\binom{5}{2} \times \binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210</math></p> <p style="text-align: center;">۰/۲۵      ۰/۲۵      ۰/۲۵      ۰/۲۵      ۰/۲۵</p>	۱۲
۱/۵	<p><math>S = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 300\}</math> و <math>A \Rightarrow  A  = \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60</math>      ۰/۲۵</p> <p style="text-align: center;">۰/۲۵      <math>B</math> : عددهای بخش پذیر بر 3</p> <p style="text-align: center;"><math>A \cap B \Rightarrow  A \cap B  = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20</math>      ۰/۲۵</p> <p style="text-align: center;"><math> A - B  =  A  -  A \cap B  = 60 - 20 = 40</math>      ۰/۷۵</p>	۱۳
۱/۷۵	<p><math> S  = 3 \times 3 \times 1 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81</math>      ۰/۲۵</p> <p>به دلیل حضور داشتن زوج مرتب عضو ۳ از مجموعه <math>B</math> پوشیده شده است، پس داریم:</p> <p style="text-align: center;"><math> A_1  = 2^4 = 16</math>      ۰/۲۵</p> <p style="text-align: center;"><math> A_2  = 2^4 = 16</math>      ۰/۲۵</p> <p>تعداد تابع های شامل (۳ و ۵) که ۶ در برد آنها نیست</p> <p>تعداد تابع های شامل (۳ و ۵) که ۹ در برد آنها نیست</p>	۱۴

نام درس : ریاضیات گسسته	بسمه تعالی	<b>راهنمای تصحیح</b>
تاریخ : ۱۴۰۲/۰۱/۲۶	<b>اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی</b>	
نوبت : شبه نهایی	اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری شبه نهایی پایه دوازدهم	
$ A_1 \cap A_2  = 1^4 = 1 \quad \cdot/۲۵$ <p>تعداد تابع های شامل (3 و 5) که 6 و 9 در برد آنها نیست</p> $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2}  =  \overline{A_1 \cup A_2}  =  S  -  A_1 \cup A_2  =  S  -  A_1  -  A_2  +  A_1 \cap A_2 $ $= 81 - 16 - 16 + 1 = 50 \quad \cdot/۷۵$	((نظر همکاران محترم در تصحیح صائب می باشد.))	