پاسخ تشریحی ریاضی کنکور تیر ۱۴۰۲ - بخش حسابان

عادل حسینی

۱) گزینه «۲».

جملات دنباله هندسی را $t_1, t_1r, t_1r^2, \dots$ در نظر می‌گیریم. پس جملات دنباله حسابی $\frac{t_1}{2}, \frac{t_1r}{2}, \frac{t_1r^2}{2}, \dots$ خواهند بود. حال با توجه به ویژگی جملات متوالی دنباله حسابی داریم:

$$\frac{t_1}{2}+\frac{t_1r^2}{2}=2\left(\frac{t_1r}{2}\right)=t_1r \Rightarrow 1+r^2=2r$$

$$\Rightarrow r^2-2r+1=(r-1)^2=0 \Rightarrow r=1$$

یعنی جملات دنباله ثابت هستند، پس $d=0$ و درنتیجه $r+d=1$ است.

---

۲) گزینه «۳».

طول رأس سهمی $x_s=\frac{-5+3}{2}=-1$ و عرض آن $y_s=1$ است. پس معادله سهمی $y=a(x+1)^2+1=ax^2+2ax+a+1$ خواهد بود. جواب‌های معادله $y=0$ ، α و β هستند و داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(-2)^2-2\left(\frac{a+1}{a}\right)=4-\frac{2a+2}{a}=5$$

$$\Rightarrow \frac{2a+2}{a}=-1 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

درنتیجه عرض از مبدأ سهمی $a+1=\frac{1}{3}$ خواهد شد.

⑤ گزینه «۴»

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 - x + P = 0$$

در این معادله $S = 1$ است. حال داریم:

$$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \Rightarrow 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{20}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{S^2 - 2P} + \underbrace{\beta^2 - \beta}_{-P} = \frac{17}{20} \Rightarrow 1 - 3P = \frac{17}{20} \Rightarrow P = \frac{1}{20}$$

اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 - x + \frac{1}{20} = 0$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

---

⑥ گزینه «۳»

از آنجا که $\frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}$ است، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}+t)^2} + \frac{1}{(\frac{1}{2}-t)^2} = \frac{160}{9}$$

داریم:

$$\frac{\frac{1}{4}+t^2-t+\frac{1}{4}+t^2+t}{\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2t^2+\frac{1}{2}}{t^4-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{16}}=\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow 160t^4-80t^2+10=18t^2+\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 160t^4-98t^2+\frac{11}{2}=0$$

در این معادله دو جواب مثبت Δ ، S و P همگی مثبت هستند، یعنی ۴ مقدار متفاوت برای t پیدا می‌شود که دو به دو قرینه هستند، پس داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\left(\frac{1}{2}+t_1\right)+\left(\frac{1}{2}-t_1\right)+\left(\frac{1}{2}+t_2\right)+\left(\frac{1}{2}-t_2\right)$$

$$=4\times\frac{1}{2}=2$$

---

۷) گزینهٔ ۱.

دو خط $4x+y=3$ و $x-4y=5$ بر هم عمودند و نقطه $(4/5, 2)$ روی هیچ کدام از آن‌ها نیست، پس فاصله این نقطه از خطوط داده شده اضلاع مستطیل را می‌دهد:

فاصله $(4/5, 2)$ از خط اول: $a=\dfrac{|4\times(4/5)+2-3|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

فاصله نقطه از خط دوم: $b=\dfrac{|4/5-4(2)-5|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{8/5}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

فاصله وسط قطر از هر قطر (ضلع ~~...~~ تعمیم تضمین تالس) برابر نصف ضلع دیگر است. پس بیشترین فاصله مورد نظر $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.

⑧ گزینه «۴»

برای ساده‌تر شدن خط را وارون می‌کنیم و با نمودار f تقاطع می‌دهیم. در این شرایط جواب معادله همان عرض نقطه یعنی ۱۰ است.

$$y = 12 - x \xrightarrow{\text{وارون}} y = 12 - x$$

$$\Rightarrow 12 - x = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}} \xrightarrow{x=10} 2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}}$$

$$\Rightarrow 4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} \Rightarrow f(m + 4) = f(5) = 1$$

⑨ گزینه «۱»

$$A(t) = A_0 \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{A(t)}{A_0} = \frac{1}{6} \Rightarrow n\left(3\log 2 - 2\log 3\right) = -\left(\log 2 + \log 3\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 3 + \log 2}{2\log 3 - 3\log 2} = \frac{\log_2 3 + 1}{2\log_2 3 - 3}$$

از طرفی از روش داده شده داریم:

پاسخ تشریحی ریاضی کنکور تیر ۱۴۰۲ ـ بخش حسابان

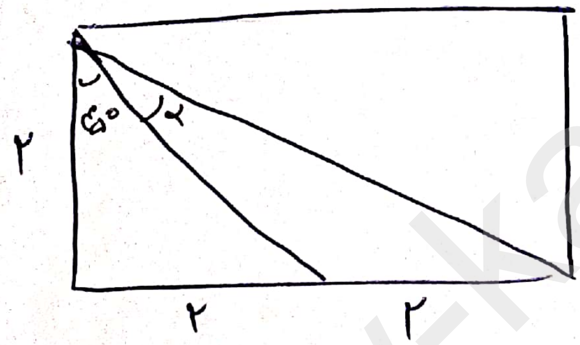
عادل حسینی

$$\log_{2} 3 = \frac{\log_{2} 5}{\log_{3} 5} = \frac{2/4}{1/4} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\frac{12}{7}+1}{\frac{24}{7}-3} = \frac{19}{3}$$

یعنی در $\frac{19}{3}$ ساعت یا ۳۸۰ دقیقه نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(۱۰) گزینه ۲.



$$\tan(\alpha+45^\circ) = \frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2-2\tan\alpha = \tan\alpha+1$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3}$$

در نتیجه $\cot\alpha = 3$ است.

(۱۱) گزینه ۱.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(6)(\sqrt{3})\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{max} = 120^\circ \\ \alpha_{min} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} = 2$$

۱۲ گزینه ۴ .

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{max} = a + \frac{|b|}{2} = 3 \\ y_{min} = a - \frac{|b|}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1,\ |b| = 4$$

در $x = 0$ مینیمم تابع رخ داده است پس $b<0$, $b = -4$ است. دوره تناوب هم برابر π است

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

پس $f(x) = 1 - 2\cos 2x$ است. با حل معادله $f(x) = 0$ داریم:

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

اختلاف این جواب‌ها در بازه $[0,\pi]$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

پاسخ تشریحی ریاضی کنکور تیر ۱۴۰۲ـ بخش حسابان

عادل حسینی

۱۳) گزینه ۱.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

حال در معادله داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) - 3\sqrt{6}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{6} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} m = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow m = -6$$

---

۱۴) گزینه ۱.

دامنه تابع $(-\infty, 0)$ است. حال طبق الگوی شرطی است باید رابطه زیر برقرار باشد

$$-m^2 + 2m - 3 < m^2 - m - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \\ m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر m برابر $\left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ است که این مجموعه فقط شامل $m = -1$ است.

(۱۵) گزینه «۳»

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}}=-\frac{a^2}{bc}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{bc}=-\frac{b}{c}$$

$$\xrightarrow{c\neq} \frac{a^2}{b}=b \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} f^{-1}(x)=-\frac{b}{a}=\pm 1$$

(۱۶) گزینه «۲»

با ترسیم برای $n=1$ و $n=2$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x=\pm1$ ، $x=\pm2$ بررسی می‌کنیم:

$$x=1:\ \lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=1-1+k=k$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left|x-[-x]\right|=2$$

$$x=-1:\ \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1) = k$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} |x-[-x]| = 2$$

پس اگر $k=2$ باشد به ازای $x=\pm 1$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول است.

$$x=2:\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} |x-[-x]| = 5$$

$$f(2) = 2-(-2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-[x]+k) = 1+k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

---

(۱۷) گزینه ۳

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$$

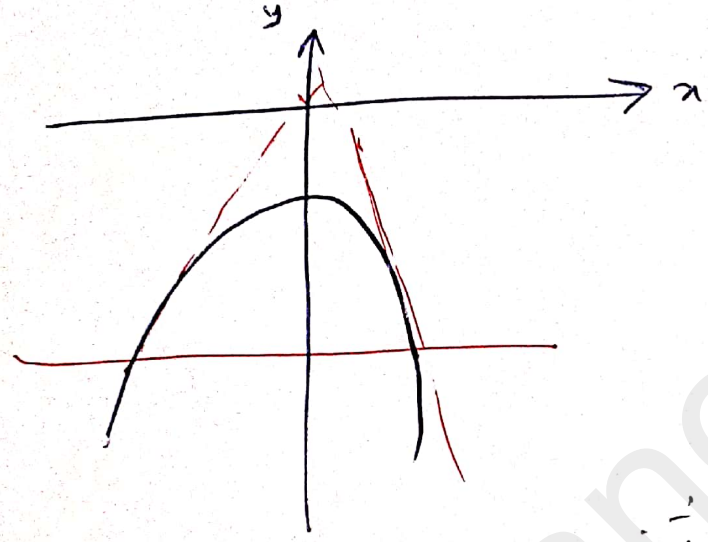
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)\left(\frac{\cos x(\sin x+1) - \sin x+1)}{(\sin x+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2(-1)(2) = -4$$

۱۸) گزینه ۱

خط d سهمی $y=-x^2-1$ را در دو نقطه قطع کرده است



برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب آن‌ها ۱+ و ۱- باشند، زیرا نسبت به خط $x=0$ متقارن هستند. پس مشتق تابع را برابر ۱± قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y=-x^2-1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر ۱٫۲۵ است.

(۱۹) گزینه ۴.

نقطه عطف نمودار تابع $y = ax^3 + bx^2$ نقطه $I\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2}\right)$ است. برای اینکه این نقطه در ربع دوم قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{b}{a} < 0 \\ , \\ \frac{b^3}{a^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a, b > 0$$

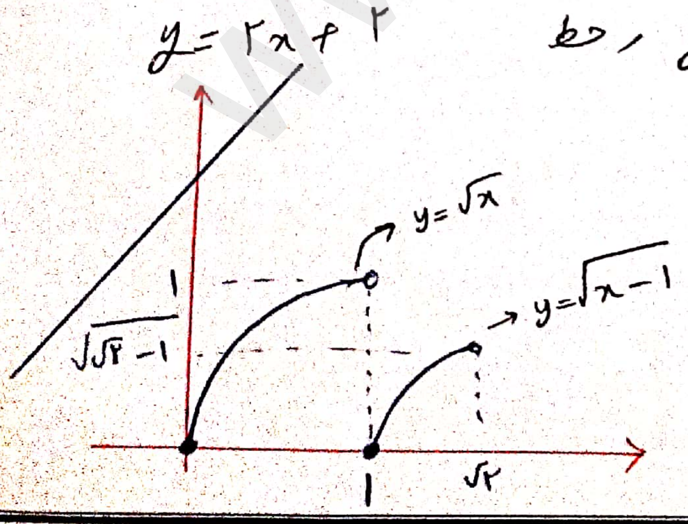
حال در این سوال داریم:

$$\begin{cases} k > 0 \\ k+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > -1$$

که این بازه شامل هیچ عدد صحیح و منفی نمی‌باشد.

(۲۰) گزینه ۲.

نمودار تابع $y = \sqrt{x - [x^2]}$ و خط $y = 2x + 2$ را در شکل زیر می‌بینیم:



کم‌ترین فاصله نقاط تابع از خط مورد نظر، کم‌ترین فاصله نقاط روی نمودار $y=\sqrt{x}$ از خط $2x-y+2=0$ است. نقطه $(\alpha,\sqrt{\alpha})$ را در نظر بگیریم؛ فاصله برابر است با:

$$d=\frac{|2\alpha-\sqrt{\alpha}+2|}{\sqrt{5}}$$

در نقطه بحرانی $d(\alpha)$، کم‌ترین مقدار رخ می‌دهد:

$$d'(\alpha)=0 \Rightarrow 2-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}=0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}=\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d_{min}=\frac{\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$$