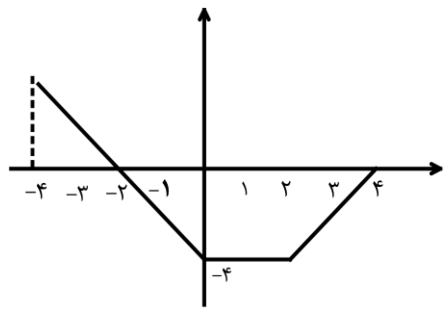
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان
دبیرستان فرزانگان ۲

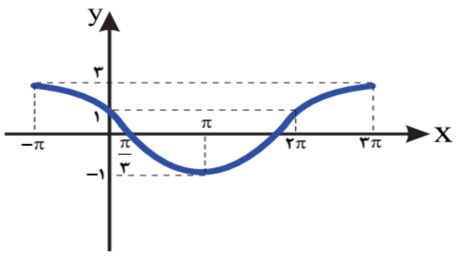
نام و نام خانوادگی:
شماره آمار:
پایه و رشته: دوازدهم تجربی
امتحانات نوبت : اول

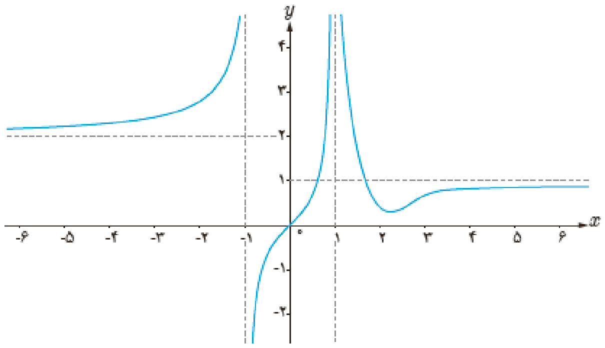
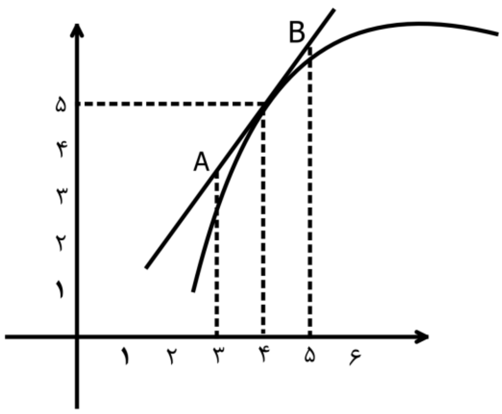
بسمه تعالی
اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ قم
دبیرستان فرزانگان ۲
(مهر آموزشگاه)

آزمون درس: **ریاضی**
تاریخ آزمون : ۱۴۰۱/۱۰/
زمان پاسخگویی : ۱۲۰ دقیقه
طراح سوال : خانم فرائی

نمره به عدد : | نمره به حروف : | امضای دبیر :

ردیف	شرح سوالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.** **الف- تابع $y=\lvert 2x+3\rvert$ در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی.** **ب- تابع تانژانت در بازه $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ نزولی است.** **ج- اگر $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ ، آن گاه $\sin\alpha<\tan\alpha$**	۰/۷۵
۲	**نمودارتابع $y=\begin{cases}\sqrt{x+2} & x>2\\ x^3 & -1\le x\le 1\\ -x+1 & x\le -3\end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید درچه بازه هایی صعودی یا نزولی است.**	۱
۳	**با استفاده از نمودار $f(x)$،** **نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ را رسم کنید.** 	۱
٤	**اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ ، دامنه و ضابطه تابع fog را به دست آورید.**	۱/۲۵
۵	**اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ و $g(x)=2\lvert x\rvert+1$ و $f^{-1}(g(a))=2$، مقدار a را بیابید.**	۱
٦	**وارون پذیری تابع $f(x)=x^2-4x+3$ را بررسی کنید و در صورت وارونپذیر نبودن آن را به یک تابع وارون پذیر تبدیل کنید، سپس وارون آن را در صورت وجود بیابید.(رسم نمودار را برای هر دو تابع انجام دهید)**	۲

۷	نمودار تابع $f(x) = 1 - a\sin(bx)$ به صورت زیر است ، a و b را به دست آورید.  	۱
۸	نسبت های مثلثاتی سینوس زاویهٔ 15° و کسینوس زاویه $^\circ$۲۲/۵ درجه را به دست آورید.	۱/۲۵
۹	معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. الف) $sin5x = \sin(2x+1)$ ب) $cos2x + \sin x = 0$	۱/۵
۱۰	اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4+5x^2+1}{3x^n - x^3 + 4} = -2$ باشد، $a+n$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۱	حاصل حد های زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x\to 1^{-1}} \frac{[x]-1}{x^2-1} =$ $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} =$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x-\sqrt{9x^2+7}}{x+\sqrt{4x^2+5}} =$ $lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-1}{cosx}$	۳/۲۵

۱۲	نمودار تابع **f** به شکل زیر است.حدود خواسته شده را بنویسید. $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$  $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$	۱
۱۳	اگر $f(x)=x^2+4$ باشد الف) $f'(1)$ به کمک تعریف مشتق را محاسبه کنید. ب) معادله خط مماس بر منحنی در نقطه ای به طول یک واقع بر آن را بنویسید.	۲
۱۴	برای تابع F درشکل زیرداریم $f(4)=5$ و $f'(4)=2$ باتوجه به شکل مختصات B و A راتعیین کنید. 	۱
۱۵	ز اگر $f(x)=\sqrt[3]{5x+1}$ باشد، مشتق تابع را به کمک تعریف مشتق بدست آورید	۱/۲۵
	موفق باشید	

پاسخ از :

نریمان فتح اللهی

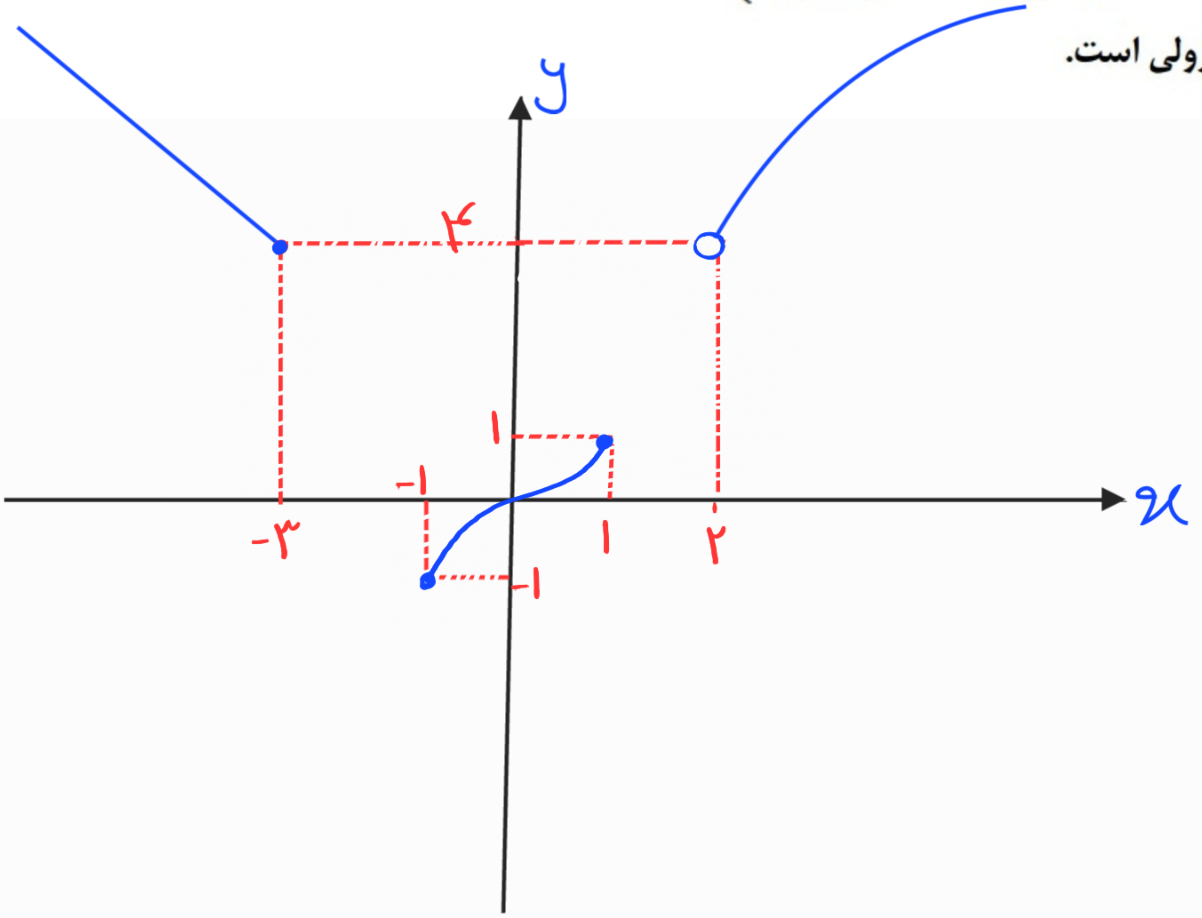
بسمه تعالی

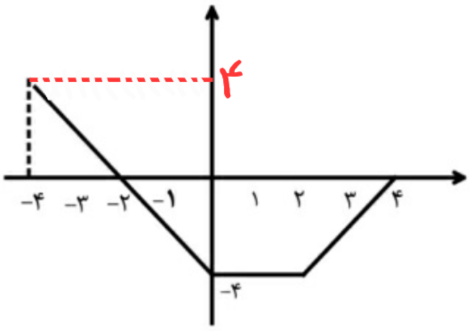
اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ قم

دبیرستان فرزانگان ۲

(مهر آموزشگاه)

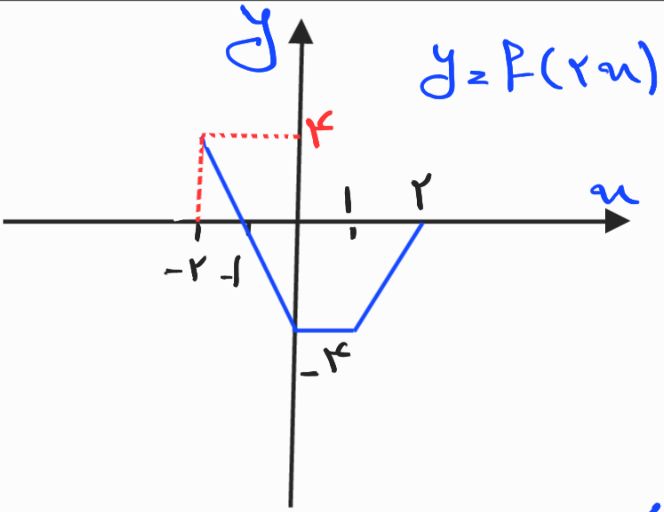
۱	**درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.** **الف- تابع** $y = \|2x+3\|$ **در** $\mathbb{R}$ **نه صعودی است و نه نزولی.** ✓ ص **ب- تابع تانژانت در بازه** $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ **نزولی است.** ✗ غ **ج- اگر** $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ **، آن گاه** $\sin\alpha < \tan\alpha$ ✗ غ
۲	**نمودارتابع** $y = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 2 \\ x^3 & -1 \le x \le 1 \\ -x+1 & x \le -3 \end{cases}$ **را رسم کنید و مشخص کنید درچه بازه هایی صعودی یا نزولی است.**



۳	با استفاده از نمودار $f(x)$، نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ را رسم کنید.	

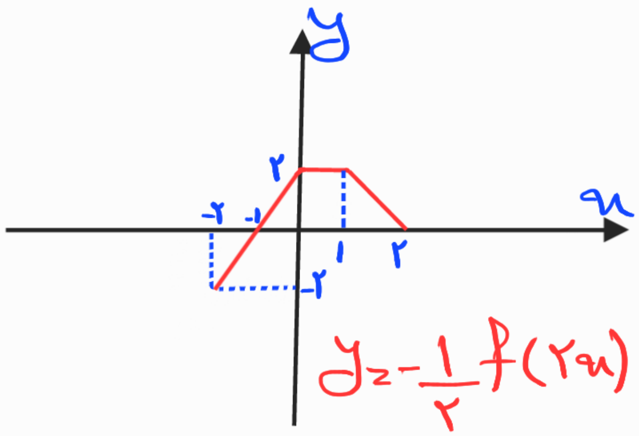
☆ با تبدیل $x \to 2x$

طول نقاط نصف می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند.

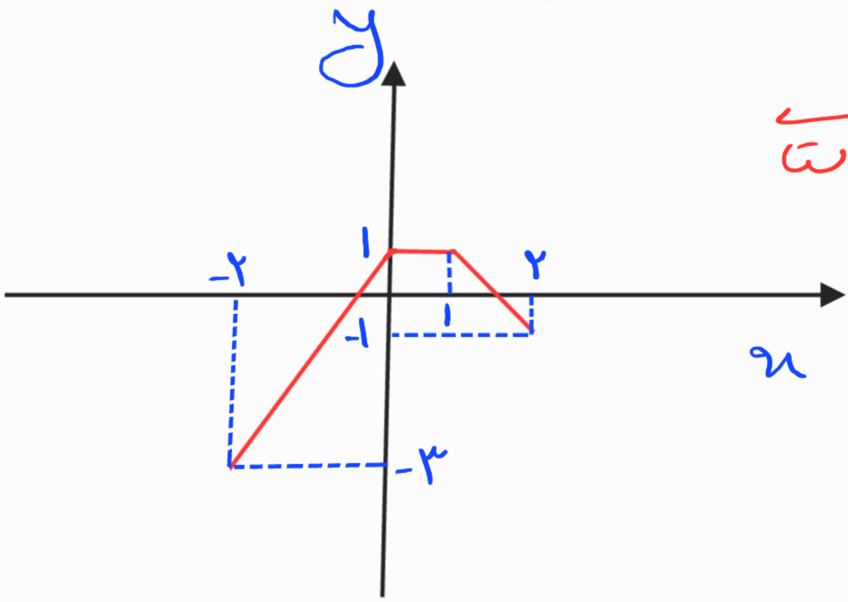


☆ با ضرب تابع f در عدد $\frac{-1}{2}$

در دامنه ثابت عرض نقاط نصف و معکوس نسبت به محور xها قرینه می‌شود.



☆ اگر نمودار قبلی را یک واحد در راستای محور yها به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ حاصل می‌شود.



اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ ، دامنه و ضابطه تابع fog را به دست آورید.	٤

$D_f: \; x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$D_g: \; \mathbb{R}-\{-2\}$

$(fog)_{(x)} = f(g(x)) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+2} - 3}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \mid \frac{2x-3}{x+2} \in x \geq 3\}$

جای x قرار می دهم

$\frac{2x-3}{x+2} \geq 3 \rightarrow \frac{2x-3-3x-6}{x+2} = \frac{-x-9}{x+2} \geq 0$

$\rightarrow -9 \leq x < -2$

$D_{fog} = \mathbb{R}-\{-2\} \cap [-9,-2) = [-9,-2)$

اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ و $g(x)=2\|x\|+1$ و $f^{-1}(g(a))=2$، مقدار a را بیابید.	۵

$$f^{-1}(g(a))=2 \longrightarrow f(2)=g(a)=3=2|a|+1$$

$$\longrightarrow |a|=1 \longrightarrow a=\pm 1$$

وارون پذیری تابع $f(x)=x^2-4x+3$ را بررسی کنید و در صورت وارونپذیر نبودن آن را به یک تابع وارون پذیر تبدیل کنید، سپس وارون آن را در صورت وجود بیابید.(رسم نمودار را برای هر دو تابع انجام دهید)	٦

اگر $f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow x_1=x_2 \longrightarrow$ یک به یک و وارون پذیر است.

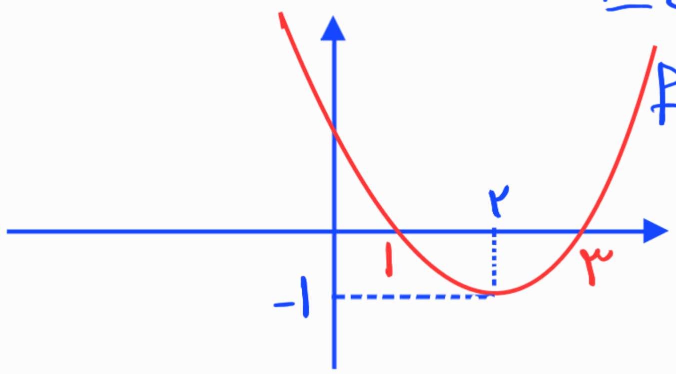
بررسی:

$$x_1^2-4x_1+\cancel{3}=x_2^2-4x_2+\cancel{3}$$

$$x_1^2-4x_1=x_2^2-4x_2 \xrightarrow{\text{مربع کامل}} (x_1-2)^2=(x_2-2)^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x_1-2|=|x_2-2| \longrightarrow x_1-2=\pm(x_2-2)$$

$\longrightarrow x_1=\pm x_2 \longrightarrow$ یک به یک و درنتیجه وارون پذیر نیست.

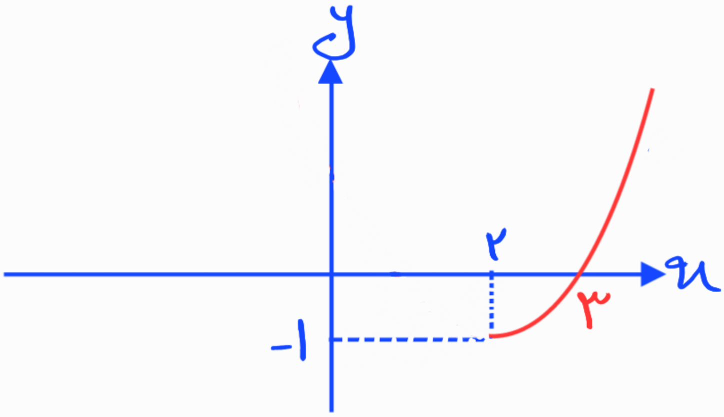


$f(x)=x^2-4x+3$

رأس سهمی $(2, -1)$

تابع درجه دوم در بازه‌ی قبل راس سهمی و یا بعد راس سهمی یک به یک و وارون پذیر است. بنابراین در بازه‌ی $[2,+\infty)$ وارون این تابع را به دست می‌آوریم.

$$y=x^2-4x+3 \; ; \; x\geq 2$$



مربع کامل می‌کنیم.

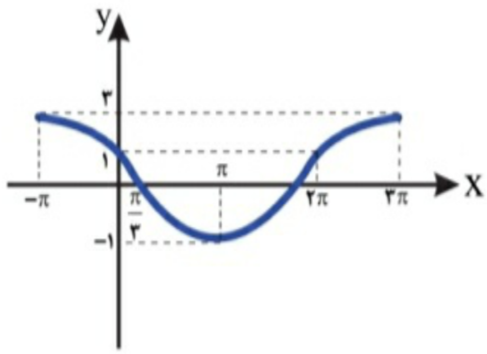
$$y=x^2-4x+4-4+3 \rightarrow y=(x-2)^2-1$$

$$\rightarrow y+1=(x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} |x-2|=\sqrt{y+1} \xrightarrow[|x-2|=x-2]{x\geq 2}$$

$$x-2=\sqrt{y+1} \rightarrow x=2+\sqrt{y+1}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$$

نمودار تابع $f(x)=1-a\sin(bx)$ به صورت زیر است ، a و b را به دست آورید.	۷
 $Max=۳$ $min=-۱$ $T=۴\pi$	

$$|-a|=\frac{Max-min}{۲}=\frac{۳-(-۱)}{۲}=۲\rightarrow a=\pm ۲$$

$$T=۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

نمودار در محل عرض مبدأ نزولی است بنابراین:

$$(-a)(b)<0\rightarrow ab>0\rightarrow\begin{cases}a=۲,\ b=\frac{۱}{۲} & \checkmark\\ a=-۲,\ b=-\frac{۱}{۲} & \checkmark\end{cases}$$

$$a=۲,\ b=\frac{۱}{۲}\rightarrow y=۱-۲\sin\frac{x}{۲}\quad\checkmark$$

$$a=-۲,\ b=-\frac{۱}{۲}\rightarrow y=۱+۲\sin(-\frac{x}{۲})=۱-۲\sin\frac{x}{۲}\quad\checkmark$$

۸	نسبت های مثلثاتی سینوس زاویهٔ 15° و کسینوس زاویه $۲۲/۵^\circ$ درجه را به دست آورید.

$$\sin^{۲} x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \longrightarrow \sin^{۲} ۱۵^\circ = \frac{۱-\cos ۳۰}{۲}$$

$$\sin^{۲} ۱۵^\circ = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \xrightarrow[\text{ربع اول}]{\sqrt{\ }} \sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\cos^{۲} x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲} \longrightarrow \cos^{۲} ۲۲{,}۵^\circ = \frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲}$$

$$\cos^{۲} ۲۲{,}۵^\circ = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \xrightarrow[\text{ربع اول}]{\sqrt{\ }} \cos ۲۲{,}۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

۹	معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. الف) $\sin 5x = \sin(2x+1)$ ب) $\cos 2x + \sin x = 0$

الف) $\sin ۵x = \sin(\overbrace{۲x+۱}^{\alpha})$

$$\begin{cases} ۵x = ۲k\pi + ۲x + ۱ \longrightarrow x = \frac{۲k\pi + ۱}{۳} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi - ۲x - ۱ \longrightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi - ۱}{۷} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x + \sin x = 0$

روش اول:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \longrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{-1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\cos 2x = -\sin x = \cos(\overbrace{\frac{\pi}{2} + x}^{\alpha})$$

$$2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + x) \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۱۰	اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^4+5x^2+1}{3x^n-x^3+4} = -2$ باشد، $a+n$ را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4}{3x^n} = -2 \longrightarrow n = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4}{3x^4} = \frac{a}{3} = -2 \longrightarrow a = -6$$

$$a + n = -6 + 4 = -2$$

۱۱	حاصل حد های زیر را محاسبه کنید.	$1^{-1}=1$ $\lim\limits_{x\to 1^{-1}} \dfrac{[x]-1}{x^2-1} =$

$$\lim_{x\to1}\frac{[x]-1}{x^2-1} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{[x]-1}{x^2-1} = \dfrac{[1^+]-1}{x^2-1} = \dfrac{1-1}{x^2-1} = 0 \ \text{مطلق} \\[2ex] \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[x]-1}{x^2-1} = \dfrac{[1^-]-1}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty\end{cases}$$

حد چپ و راست برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \frac{0}{0} \ \text{مبهم}$$

روش اول :

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{4+2\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$$

روش دوم : Hop مناسب با کنکور

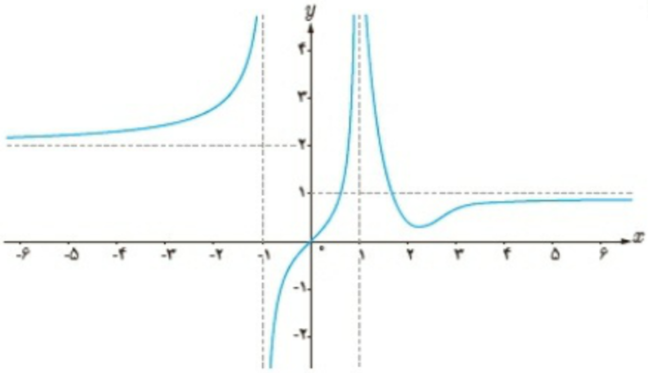
$$=\lim_{x\to4}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}} = \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt{9x^2+7}}{x+\sqrt{4x^2+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x-|۳x|}{x+|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x-۳x}{x-۲x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-x}=-۲$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{-1}{cosx}=\frac{-1}{\cos\left(\frac{\pi}{۲}^+\right)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۱۲ نمودار تابع f به شکل زیر است.حدود خواسته شده را بنویسید.



$+\infty=\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)$

$۱=\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$۲=\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$-\infty=\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)$

۱۳ اگر $f(x) = x^2 + 4$ باشد

$f(1) = 1 + 4 = 5$

الف) $f'(1)$ به کمک تعریف مشتق را محاسبه کنید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی در نقطه ای به طول یک واقع بر آن را بنویسید.

الف)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4 - 5}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$ مبهم

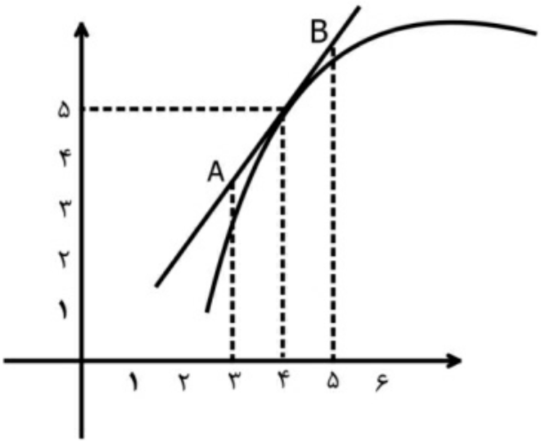
$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

ب)

$(1, 5)$ شیب خط مماس در نقطه $= f'(1) = 2$

$$y - 5 = 2(x - 1) \longrightarrow y = 2x + 3$$

برای تابع F درشکل زیرداریم $f(4)=5$ و $f'(4)=2$ باتوجه به شکل مختصات B و A راتعیین کنید. ۱٤



$y-5=f'(4)(x-4)$

$y-5=2(x-4)$

$y=2x-3$

$x_B=5 \longrightarrow y_B=2(5)-3=7$

$x_A=3 \longrightarrow y_A=2(3)-3=3$

۱۵ اگر $f(x)=\sqrt[3]{5x+1}$ باشد، مشتق تابع را به کمک تعریف مشتق بدست آورید

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{5(x+h)+1}-\sqrt[3]{5x+1}}{h}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{5(x+h)+1}-\sqrt[3]{5x+1}\right)\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)+1-(5x+1)=5h}{h\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$

$$=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$