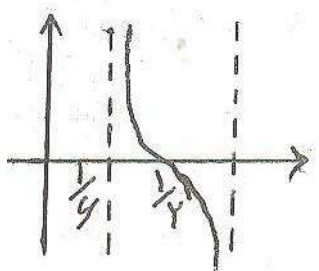


نمره به عدد: نمره به حروف: امضاء دبیر تجدید نظر: به عدد به حروف: امضاء دبیر:	 وزارت آموزش عالی و فوق‌العاده مرکز سنجش و ارزشیابی تحصیلی دبیرستان شهید کوشک شیرازی امتحانات دیماه سال تحصیلی ۴۰۲-۴۰۱	نام و نام خانوادگی:
		نام درس: حسابان ۲
		تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳
		مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه
نام دبیر: آقای عیسی آبادی	شماره صندلی:	نام دبیر: آقای عیسی آبادی
کلاس:		

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف. اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها بدست می آید.</p> <p>ب. هر تابع یک به یک، اکیدا یکنواست.</p> <p>پ. به کوچکترین انتقال افقی از نظر قدر مطلق به طوری که نمودار بر خودش منطبق باشد، دوره تناوب می گویند.</p> <p>ت. تابع $y = \tan x$ به ازای $x = \frac{k\pi}{2}$ تعریف نمی شود.</p>	۱
۳	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف. اگر $x = 2$ محور تقارن سهمی $y = f(3-x)$ باشد، محور تقارن $y = f(x-4)$ برابر است با.....</p> <p>ب. تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیدا صعودی است. حداقل مقدار a برابر است با.....</p> <p>پ. اگر عبارت $x(x+1)^3$ بر عبارت درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه مقدار $a + b + c$ برابر است با.....</p> <p>ت. اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است با.....</p> <p>ث. اگر دامنه‌ی تابع $y = f(2x-3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = f(3x+1)$ برابر است با.....</p> <p>ج. معادله $\tan x \tan 5x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ جواب دارد.</p>	۲
۱	<p>قرینه‌ی نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز نواحی اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟</p>	۳
۱	<p>اگر f تابعی نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x-1) - f(x+2)}$ را تعیین کنید.</p>	۴

۱	<p>باقی مانده تقسیم کوچکترین چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای‌های $x - 2$، $x + 2$ و $x + 1$ برابر ۵ می‌باشد. اگر این چندجمله‌ای بر x بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه را تعیین کنید.</p>	۵
۱	<p>اگر باقی مانده چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب مساوی ۵ و ۳ باشد، باقی مانده $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابید.</p>	۶
۲	<p>دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف. $y = \frac{\cos x}{\cos x}$</p> <p>ب. $y = \cos^3 x \cos x - \sin^3 x \sin x$</p>	۷
۱	<p>نمودار تابع $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b را بیابید.</p> 	۸
۱	<p>نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟</p>	۹

۱	<p>جواب کلی معادله $\tan x + \cot x = \frac{2}{\cos 2x}$ را تعیین کنید.</p>	۱۰
۲	<p>حاصل حدهای زیر را بیابید.</p> <p>الف. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cos^4 x - 1}$</p> <p>ب. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt[3]{x^3 + 6x} - \sqrt[3]{x^3 + 9x^2}}$</p>	۱۱
۱	<p>اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^3 + ax + b} = +\infty$ باشد، $a + b$ را تعیین کنید.</p>	۱۲
۱	<p>اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + ax - 1} + bx + 1) = 0$ مقدار $b - a$ را تعیین کنید.</p>	۱۳
۱	<p>نمودار تابع $f(x) = \log\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ چند خط مجانب قائم دارد؟</p>	۱۴

۱	<p>اگر مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x - 1}$ نمودار تابع را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا مجانب قائم آن چقدر است؟</p>	۱۵
۱	<p>مساحت ناحیه‌ی محصور بین مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x + [x]}{ x - 1}$ چند واحد سطح است؟</p>	۱۶

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف. اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها بدست می آید. (نادرست)</p> <p>ب. هر تابع یک به یک، اکیدا یکنواست. (نادرست)</p> <p>پ. به کوچکترین انتقال افقی از نظر قدرمطلق به طوری که نمودار بر خودش منطبق باشد، دوره تناوب می گویند.</p> <p>ت. تابع $y = \tan x$ به ازای $x = \frac{k\pi}{p}$ تعریف نمی شود. (نادرست)</p>	۱
۳	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف. اگر $x = 2$ محور تقارن سهمنی $y = f(3-x)$ باشد، محور تقارن $y = f(x-4)$ برابر است با $x = 5$.</p> <p>ب. تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیدا صعودی است. حداقل مقدار a برابر است با $\frac{5}{2}$.</p> <p>پ. اگر عبارت $x(x+1)^3$ بر عبارت درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه مقدار $a + b + c$ برابر است با $\dots\dots\dots$ (هفت)</p> <p>ت. اگر $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ باشد، حدود x برابر است با $\dots\dots\dots \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.</p> <p>ث. اگر دامنه‌ی تابع $y = f(2x-3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(3x+1)$ برابر است با $\dots\dots\dots [0, 2]$.</p> <p>ج. معادله $\tan x \tan 2x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ $\dots\dots\dots$ جواب دارد.</p>	۲
۱	<p>قرینه‌ی نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز نواحی اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟</p> <p>$y = \sqrt{x}$ $\xrightarrow{x \rightarrow -x}$ $y = \sqrt{-x}$ $\xrightarrow{2 \text{ واحد } y}$ $y = \sqrt{2-x}$</p> <p>نقطه برخورد در نیمه سوم</p> <p>$y = \sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$</p> <p>$0 < x < 2 \Rightarrow x = 1$</p> <p>نقطه قطع: $y = x$</p>	۳
۱	<p>اگر f تابعی نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x-1) - f(x+2)}$ را تعیین کنید.</p> <p>$f(x-1) \geq f(x+2) \xrightarrow{\text{تزیی } f} x-1 \leq x+2$</p> <p>$\xrightarrow{\text{تزیی } f} (x-1)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow (x-1+x+2)(x-1-x-2) \leq 0$</p> <p>$\Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$</p>	۴

باقی مانده تقسیم کوچکترین چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای‌های $x-2$ ، $x+2$ و $x+1$ برابر ۵ می‌باشد. اگر این چندجمله‌ای بر x بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه را تعیین کنید.

کوچکترین چندجمله‌ای بر صورت زیر است:

$$p(x) = a(x+1)(x+2)(x-2) + 5$$

بر x بخش پذیر است $\rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow -2a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

ضریب جمله با بیشترین درجه $\rightarrow a = \frac{5}{2}$

اگر باقی مانده چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب مساوی ۵ و ۳ باشد، باقی مانده $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابید.

$$f(1) = 5, f(2) = 3$$

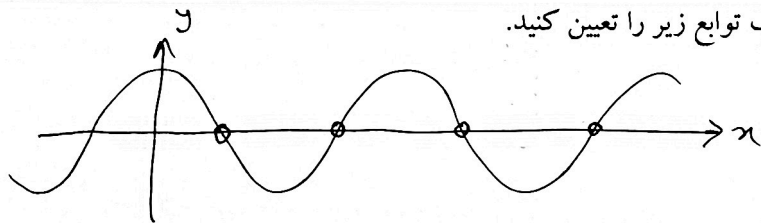
$$xf(x) = (x-1)(x-2)q(x) + \alpha x + \beta$$

$$\begin{cases} x=1: f(1) = \alpha + \beta = 5 \\ x=2: 2f(2) = 2\alpha + \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 4$$

باقی مانده $x+4$

الف $y = \frac{\cos x}{\cos x}$

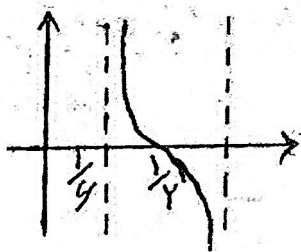
$$T = 2\pi$$



دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

ب $y = \cos^2 x \cos x - \sin^2 x \sin x = \cos(2x+x) = \cos 3x$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{1.5}$$



نمودار تابع $f(x) = \tan(a+bx)$ به صورت مقابل است. b را بیابید.

نصف دوره تناوب برابر $\frac{1}{3}$ است $\rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |b| = 3\pi \rightarrow b < 0$$

$$\Rightarrow b = -3\pi$$

نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

$$y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{2k+1}{4}\pi$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{2k+1}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{11}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0, 1, 2$$

معادله ۵ جواب دارد.

جواب کلی معادله $\tan x + \cot x = \frac{2}{\cos 2x}$ را تعیین کنید.

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\cos 2x} \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

10

حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{2 \cos^2 x - 2} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{-2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{-2 \sin x \cos^2 x} = \frac{1}{-2(1)(0^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

11

ب. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+9x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+1| - |x-2|}{-x - (x+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1+x-2}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

اگر $\lim_{x \rightarrow r} \frac{1}{x^2+ax+b} = +\infty$ باشد، $a+b$ را تعیین کنید.

$$x^2+ax+b = (x-c)(x-3)^2 = (x-c)(x^2-6x+9)$$

$$\Rightarrow x^2+ax+b = x^3 - (c+6)x^2 + (6c+9)x - 9c$$

$$c+6=0 \Rightarrow c=-6 \Rightarrow x^2+ax+b = x^3 - 6x^2 + 9x - 54$$

$$\Rightarrow a=-6, b=9 \Rightarrow a+b=3$$

12

اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+ax-1} + bx+1) = 0$ مقدار $b-a$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+ax-1} + bx+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|2x + \frac{a}{4}| + bx+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - \frac{a}{4} + bx+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -\frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b-a = -2$$

13

نمودار تابع $f(x) = \log(\frac{x^2}{1-x^2})$ چند خط مجانب قائم دارد؟

شیر 3 و مجانب قائم $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ و مجانب عمود f .

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نمودار 3 مجانب قائم دارد.

14

اگر مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x-1}$ نمودار تابع را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا مجانب قائم آن چقدر است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y=2$ مجانب افقی و $x=1$ مجانب قائم است.

$$\frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x-1} = 2 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} - 4 = 2x - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

فاصله نقطه A از خط مجانب قائم $x=1$ برابر $|4-1|=3$ است.

۱۵

مساحت ناحیه‌ی محصور بین مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x+[x]}{|x|-1}$ چند واحد سطح است؟

$$\text{مجاذب قائم: } |x|=1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{مجاذب افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+[x]}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\pm x} = \pm 2$$

خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب قائم و خطوط $y=2$ و $y=-2$ مجانب افقی هستند.

۱۶

سطح نصیب شده بین این ۴ خط برابر است: $[2-(-2)] \times [1-(-1)] = 8$