



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری:

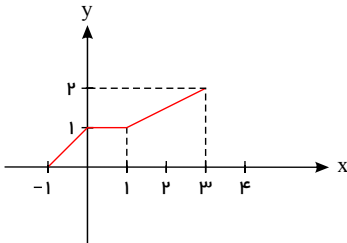


شهید مهدوی

نام آزمون: حسابان ۲ ترم ۱

تاریخ آزمون:

۱ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است، نمودار تابع $y = -f(x - 1)$ را رسم کنید.



۲ اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به دست آورید.

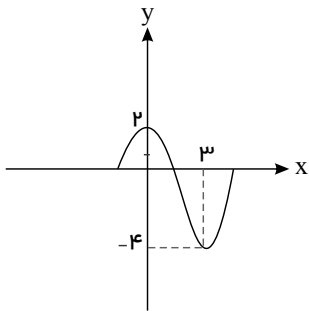
۳ نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^3$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

۴ نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

۵ اگر $\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$ ، حدود x را به دست آورید.

۶ نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ بصورت زیر است، ضابطه این تابع را بیابید.



۷ اگر دوره تناوب $f(x) = 3 \cos(mx) + 4$ برابر با $\frac{\pi}{5}$ باشد، دوره تناوب تابع $g(x) = -\cos(m + 2)x$ را بیابید. ($m > 0$)

۸ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 2$ برابر با یک است.

ب) تابع تنازانت در دامنه‌اش صعودی است.

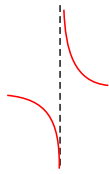
۹ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $2 \cos^2 3x + \cos 3x = 0$

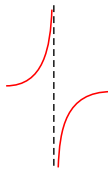
ب) $\sin 5x + \cos 3x = 0$



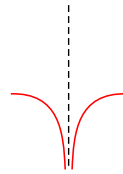
کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نمایش می دهد؟ چرا؟



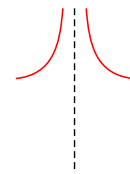
(ت)



(پ)

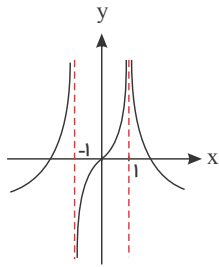


(ب)



(الف)

۱۱) نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{-1}{f(x)} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{f(x)} \right]$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x}{f(x)} \right]$

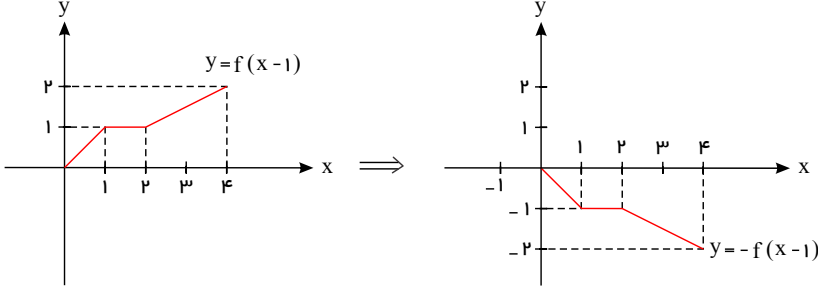
۱۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 1}{t^3 - 2t^2 + 1}$$

پاسخنامه تشریحی

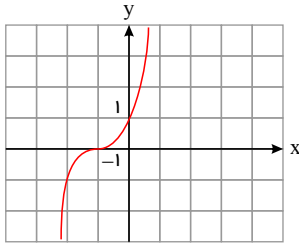
۱ برای رسم $y = -f(x-1)$ ، نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



۲ چون $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است پس باقی مانده تقسیم صفر است.

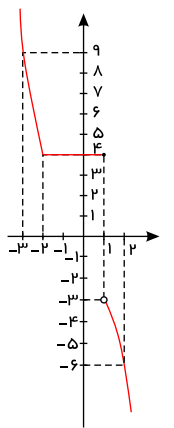
$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$



۳ رای رسم نمودار تابع ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. تابع اکیداً صعودی است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} -2 & -3 \\ 4 & 9 \\ 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{array}$$



اکیداً نزولی $(-\infty, -2] \rightarrow$

نزولی $(-\infty, 1) \rightarrow$

هم صعودی و هم نزولی \rightarrow تابع ثابت $(-2, 1) \rightarrow$

اکیداً نزولی $(1, +\infty) \rightarrow$

نزولی $D_f = \mathbb{R} \rightarrow$

با توجه به اکیداً صعودی بودن $\log(x+1) \leq \log(2x-3) \rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$

۴ تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینییم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b>0} b = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= |a| + c = 2 \\ \min f &= -|a| + c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1$$

7

می‌دانیم: $f(x) = a \cos bx + c$ و $f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$

$$f(x) = 3 \cos(mx) + 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow m = 10$$

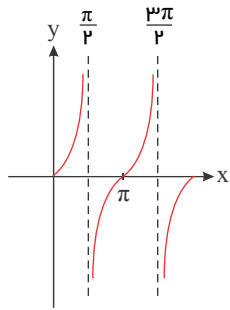
$$\Rightarrow g(x) = -\cos 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

الف) نادرست - می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

$$\text{مقدار مینیمم} = -| -3 | + 2 = -1$$

ب) نادرست

زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است تابع تنازانت در یک دوره تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.



9

نکته: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

الف) $2 \cos^2 3x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(2 \cos 3x + 1) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0, \cos 3x = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \cos 3x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

ب) $\sin 5x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin 5x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right)$

$$3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 5x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 5x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 5x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{1} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

10) باید حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon-1)^2} = \frac{1}{+\varepsilon^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon-1)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

جواب مورد الف) است.

11

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{-1}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{-\infty} \right] = [0^+] = 0$

الف

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^r + 1}{t^r - 2t^r + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^r}{t^r} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = \frac{1}{-\infty} = 0$$