



بیت

شماره ۵: «شماره ۵»

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران  
دبیرستان علامه حلی ۴  
آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام\_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون: ۸:۰۰  
زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته: ریاضی پایه: دوازدهم کلاس: «کلاس» تعداد

ردیف	سوالات	بارم
۱	برای هر سه عدد حقیقی $X, y, z$ ثابت کنید: $X^2 + y^2 + z^2 \geq Xy + yz + Xz$	۱,۵
۲	اگر $a$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $a + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $a - \beta$ گنگ است.	۱,۵
۳	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم. ب) گرافی را هم برند می‌نامیم که بین هر دو راس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر $G$ یک گراف $n$ رأسی باشد مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $\binom{n(n-1)}{2}$ است ت) گراف $C_n$ تنها یک (دور، مسیری) است $n$ رأسی دارد	۱
۴	اگر $a$ عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a + 204a + 3)$ را به دست آورید.	۱,۵



پهنا

شماره ۵: «شماره ۵»

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران  
دبیرستان علامه حلی ۴  
آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام\_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون: ۸:۰۰  
زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته: ریاضی پایه: دوازدهم کلاس: «کلاس» تعداد

۵	اگر باقی مانده تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱,۵
۶	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ , $(k \in \mathbb{W})$ نوشته می شود.	۱,۲۵
۷	فرض کنید $a$ عدد طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را بدست آورید.	۱
۸	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.	۱,۵

شماره ۵: «شماره ۵»

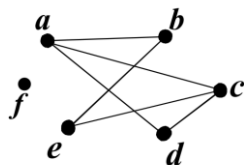


اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران  
دبیرستان علامه حلی ۴  
آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰



نام و نام خانوادگی: «نام» «نام\_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون: ۸:۰۰  
زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته: ریاضی پایه: دوازدهم کلاس: «کلاس» تعداد

۱,۲۵	۹	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟
۱,۵	۱۰	معادله هم نهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.
۱,۵	۱۱	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را بدست آورید.
۲	۱۲	گراف $G$ که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $Ng(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس $a$ بنویسید. ت) آیا گراف $G$ همبند است؟





پشتیبان

شماره ۵: «شماره ۵»

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران  
دبیرستان علامه حلی ۴  
آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام\_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون: ۸:۰۰  
زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته: ریاضی پایه: دوازدهم کلاس: «کلاس» تعداد

۱	گراف $G$ ، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد راس های گراف است مرتبه گراف را به دست آورده و گراف $G$ را رسم کنید	۱۳
۱	در گراف $G$ درجه راس $V$ برابر با ۹ است و درجه راس $V$ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است مرتبه گراف $G$ را مشخص کنید.	۱۴
۱	گراف کامل $K_p$ دارای ۱۰ یال است ابتدا $p$ را به دست آورید سپس گراف را رسم می کنید	۱۵

## ۲ پاسخ تشریحی

۱ ابتدا هر دو طرف را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

حالا جملات  $2x^2$ ،  $2y^2$  و  $2z^2$  را به شکل  $x^2 + x^2$  و ... می‌نویسیم؛ و عبارات سمت راست را به چپ می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \geq 0$$

حالا می‌بینیم اتحاد مربع کامل داریم:

$$\underbrace{(x-y)^2} + \underbrace{(x-z)^2} + \underbrace{(y-z)^2}$$

جمع سه عبارت نامنفی، همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. یعنی به یک عبارت بدیهی درست رسیدیم.

■ راه حل:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \iff 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \geq 0 \iff (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

عبارت بدیهی

۲) فرض کنید  $\alpha - \beta$  گنگ نباشد؛ پس گویاست (فرض خلف). از طرفی می‌دانیم مجموع دو عدد گویا، عددی گویا است. پس جمع  $\alpha - \beta$  و  $\alpha + \beta$  باید گویا باشد. یعنی  $2\alpha \in \mathbb{Q}$ ، که این یک تناقض است چون  $\alpha$  گنگ بود. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

۳) الف) مرتبه (ب) مسیر (پ)  $\frac{n(n-1)}{2}$  (ت) دور

\* تعداد یال‌های یک گراف با اندازه  $n$  می‌تواند

\* گراف  $P_n$  یک مسیر  $n$  رأسی با  $n-1$  یال دارد.

۴) ب م م دو عبارت ل d در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{aligned} d \mid 4a+3 &\xrightarrow{\times 5} d \mid 20a+15 \\ d \mid 5a+2 &\xrightarrow{\times 4} d \mid 20a+8 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{تفاضل}} \quad d \mid 20a+15 - 20a-8 \Rightarrow d \mid 7$$

چون ب م م هواره مثبت است، پس ما  $d=1, 7$  را داریم. اما باید بررسی کنیم که آیا  $d=7$  امکان پذیر هست یا نه؟

$$\begin{aligned} 7 \mid 4a+3 &\xrightarrow{\times 7} 7 \mid 28a+21 \\ 7 \mid 5a &\xrightarrow{\times 4} 7 \mid 20a \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{تفاضل}} \quad 7 \mid 21 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 7 \mid 5a+2 &\xrightarrow{\times 7} 7 \mid 35a+14 \\ 7 \mid 7a &\xrightarrow{\times 5} 7 \mid 35a \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{تفاضل}} \quad 7 \mid 14 \quad \checkmark$$

پس شدنی است. جواب  $d=7$  است.

۵) طبق داده های سوال:

$$\begin{aligned} m \equiv 2 \pmod{13} &\xrightarrow{\times 3} 3m \equiv 6 \pmod{13} \\ n \equiv 9 \pmod{13} &\xrightarrow{\times 5} 5n \equiv 45 \equiv 6 \pmod{13} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{تفاضل}} \quad 5n - 3m \equiv 6 - 6 \equiv 0 \pmod{13}$$

پس باقی مانده برابر صفر است.

★ می توانیم دو طرف یک هم نشی را در عدد ضرب کنیم.

★ می توانیم دو طرف دو هم نشی را از هم کم کنیم یا با هم جمع کنیم. بشرطی که بماند برابر باشد.

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}, \quad \begin{aligned} a-c \equiv b-d \pmod{m} \\ c-a \equiv d-b \pmod{m} \end{aligned}$$

۶ اثبات با در نظر گرفتن همه حالات ها ، یک عدد صحیح از لحاظ باقی مانده بر ۴ حالات زیر را دارد . حالا بررسی می کنیم که در کدام حالات امکان اول بودن دارد .  
به خاطر داریم که هگلی اعداد اول بزرگ تر از ۳ ، فرد هستند .

$$P = 4K \Rightarrow 2|P, 4|P, 4|P \quad \times \text{ تناقض}$$

$$P = 4K + 1 \Rightarrow \text{فرد} \quad \checkmark$$

$$P = 4K + 2 \Rightarrow P = 2(2K+1) \Rightarrow 2|P \quad \times \text{ تناقض}$$

$$P = 4K + 3 \Rightarrow P = 3(2K+1) \Rightarrow 3|P \quad \times \text{ تناقض}$$

$$P = 4K + 4 \Rightarrow P = 2(2K+2) \Rightarrow 2|P \quad \times \text{ تناقض}$$

$$P = 4K + 5 \Rightarrow \text{فرد} \quad \checkmark$$

در واقع ما به دنبال حالاتی هستیم که اولاً  $P$  فرد باشد . و ثانیاً به عدد دیگری بخش پذیر نباشد .  
از آنجایی که کل اعداد صحیح دنیا در یکی از دسته های بالا هستند ، تعدادی از آنها مردود شدند و شرایط اول بودن را نداشتند ، پس اعداد اول حتماً در یکی از دو دسته  $4K+1$  و  $4K+5$  قرار می گیرند .

← ضمناً توجه بفرمایید که  $4K+5$  همان  $4K-1$  است .

$$[21a^2, 35a^3] = [3 \times 7 \times a^2, 5 \times 7 \times a^3] = 3 \times 5 \times 7 \times a^3 = 105a^3 \quad \checkmark$$

\* برای محاسبه ک.م.م دو عدد ، ابتدا آنها را به عوامل اول تجزیه می کنیم . سپس از بین پایه های مشترک ، پایه با بیشترین توان را انتخاب می کنیم . پایه های غیر مشترک را هم انتخاب می کنیم و همه را در هم ضرب می کنیم . حاصل بدست آمده همان ک.م.م است .

۸ هر جا صحبت از رقم یکان شد ، با هم نشتی به پیمانده ۱۰ مرور کار داریم .

$$3a - 5 \equiv 4a - 7 \pmod{10} \xrightarrow{-3a} -5 \equiv a - 7 \pmod{10} \xrightarrow{+7} 2 \equiv a \pmod{10}$$

$$9a + 4 \equiv ? \pmod{10}$$

$$a \equiv 2 \pmod{10} \xrightarrow{\times 9} 9a \equiv 18 \equiv 8 \pmod{10} \xrightarrow{+4} 9a + 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{10}$$

پایه : ۲

9 در مسائل تقویم شماری باید فاصله روزها را حساب کنیم و آن را به شکل هم نشستی به پیمانه 7 بریم ، زیرا هفته 7 روز دارد ، سپس عدد نهایی نشان دهنده تعداد روزی است که باید جلو برویم .

$$5 \equiv 5 + 6 + 1 \equiv 12 + (3 \times 35) + 29 \text{ : فاصله}$$

از پس کل آبان و آذر و دی باقی مانده از هر  
یعنی باید 5 روز جلو برویم

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
5	1	2	3	4	5	6

طبق جدول پنجشنبه  
« پنج شنبه »

10  $5x \equiv 35 \Rightarrow 5x \equiv 2 \equiv 13 \equiv 24 \equiv 35$

در بالا کاری که کردیم این بود که مضارب پیمانه را به طرف راست اضافه کردیم تا به مطلوب برسیم .  
حالا می خواهیم در طرف راست 5 تقسیم کنیم ، ضمناً  $a=1, (5,1)=1$

$$x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7, k \in \mathbb{Z}$$

\* اگر خواص دو طرف هم نشستی  $ma \equiv mb \pmod{p}$  بر  $m$  تقسیم کنیم ، باید به  $(m, p)$  دقت کنیم  
اگر  $(m, p) = 1$  باشد آنگاه  $a \equiv b \pmod{p}$  است . اما اگر  $(m, p) = n$  مخالف ! باشد آنگاه  
 $a \equiv b \pmod{p}$

یعنی باید پیمانه را بر  $n$  تقسیم کنیم . لذا پیمانه جدید داریم .

11 برای حل معادله سیاله خطی باید دو طرف تساوی را به هم نشستی به پیمانه ضرب کوچکتر بریم .

$$9x + 13y = 7 \Rightarrow 9x + 13y \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow 4y \equiv 7 \pmod{9} \xrightarrow{\div 4} y \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow y = 9k + 4$$

حالا  $y = 9k + 4$  را در معادله اصلی جایگذاری می کنیم :

$$9x + 13(9k + 4) = 7 \Rightarrow x = -5 - 13k$$

جواب :  $x = -5 - 13k, y = 9k + 4$



$$N_G(C) = \{a, d\}$$

الف) ۱۲

ب) رأس  $f$  ،  $e$

پ)  $adceba$

ت) خیز زیرا بین رأس  $f$  و رؤس دیگر هیچ مسیری وجود ندارد

\* بزرگترین درجه در گراف  $G$  مربوط به رأسی است که در گراف  $G$  کوچکترین درجه را دارد.

\* همسایگی باز رأس  $a$  یا همان  $N_G(a)$  شامل رأسهایی است که  $a$  به آنها وصل است.

همسایگی بسته رأس  $a$  یا همان  $N_G[a]$  شامل همان رأسهای مذکور + خود  $a$  است.

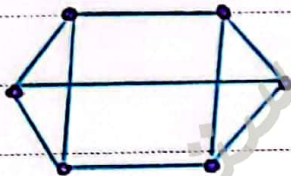
۱۳)  $۲P = ۲q$  همترین نکته درباره یک گراف  $۲$ -منتظم از مرتبه  $P$  این است که

$$q = \frac{۲P}{۲}$$

$$q = ۲P - ۳ \Rightarrow \frac{۲P}{۲} = ۲P - ۳ \Rightarrow \frac{۲P}{۲} = ۲P - ۳ \Rightarrow \frac{P}{۲} = ۳ \Rightarrow P = ۶$$

مرتبه گراف  $۶$  است.

یعنی یک گراف  $۳$ -منتظم از مرتبه  $۶$ .



۱۴) تعبیر سوال این است که در گراف  $G$ ، رأس  $v$  به  $q$  رأس وصل است و به تعداد ناشخصی رأس دیگر از گراف وصل نیست.

پس اینک در این گراف  $G$ ، تمام یالهایی که در  $G$  نبودند، حضور دارند.

رأس  $v$  در گراف  $G$  به  $۲$  رأس دیگر وصل است، نشان میدهد در فضای کل گراف،  $۲۱$  رأس دیگر بجز خود  $v$  وجود دارند.

پس مرتبه گراف  $۲۲$  است. زیرا خود  $v$  هم باید حساب شود.

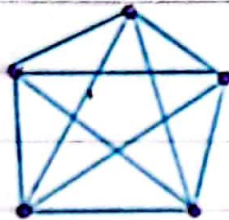
Subject: \_\_\_\_\_

Date \_\_\_\_\_

$q$  = افزایش، تعداد یال  
 $P$  = مرتبه، تعداد رؤس

می دانیم در یک گراف کامل  $q = \frac{P(P-1)}{2}$  است.

$$q = \frac{P(P-1)}{2} = 10 \Rightarrow P(P-1) = 20 \Rightarrow P = 5 \checkmark$$



گراف  $K_5$  منتظر است.

علی محمدزاده تنبیسندی