پاسخ نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی - تجربی - انسانی) ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱ الف) نادرست است، زیرا اگر $n=4$ در این صورت $n^2=16$ مضرب ۸ است ولی $n=4$ مضرب ۸ نیست.

ب) نادرست است، زیرا $\sqrt{2}\in Q'$ و $0\in Q$ ولی $0\times\sqrt{2}=0\notin Q'$

پ) نادرست است، زیرا اگر $a=9$ و $b=6$ در این صورت $9\mid 36$ ولی $9\nmid 6$

ت) درست است.

۲ طبق فرض مسأله داریم:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}a=5q_1+1\\ q=7q_2+4\end{cases}\Rightarrow$$

حال به دنبال دو عدد صحیح و متوالی هستیم که مضرب ۳۵ در طرف دو متساوی‌ها ایجاد کرده که دو عدد ۱۴ و ۱۵ این ویژگی را دارند پس تساوی (۱) را در ۱۴ و تساوی (۲) را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}14a=14\times 5q_1+14\\ 15a=15\times 7q_2+60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14a=2\times 35q_1+14\\ 15a=3\times 35q_2+60\end{cases}$$

$$\Rightarrow(15a-14a)=35(\overbrace{3q_2-2q_1}^{q'})+(60-14)$$

$$\Rightarrow a=35q'+46=35q'+35+11=35(\overbrace{q'+1}^{q})+11$$

$$\Rightarrow a=35q+11\Rightarrow\boxed{r=11}$$

۳

طبق فرض:

$$7\mid 3k-1\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}49\mid 9k^2-6k+1\qquad(1)$$

$$7\mid 3k-1\xrightarrow{\text{طرفین}\times 7}49\mid 21k-7\qquad(2)$$

$$49\mid 21k-7\xrightarrow{\text{سمت راست}\times K^2}49\mid 21k^3-7k^2\quad(1)$$

$$(1),(2),(3)\xrightarrow{+}49\mid 21k^3+2k^2+15k-6$$

۴ می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ و $(m,n)=1$ آنگاه $a\overset{mn}{\equiv}b$

$$3\overset{3}{\equiv}0\to 3^{130}\overset{3}{\equiv}0\qquad(1)$$

$$3^3=27\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1\to 3^3\overset{7}{\equiv}-1\to(3^3)^{43}\overset{7}{\equiv}(-1)^{43}$$

$$\to 3^{129}\times 3^1\overset{7}{\equiv}(-1)\times 3\to 3^{130}\overset{7}{\equiv}-3\qquad(2)$$

$$2\overset{3}{\equiv}-1\to 2^{130}\overset{3}{\equiv}1\qquad(3)$$

$$(1),(3)\to 3^{130}-2^{130}\overset{3}{\equiv}0-1=-1\overset{3}{\equiv}2\to 3^{130}-2^{130}\overset{3}{\equiv}2\ (4)$$

$$2^6=64\overset{7}{\equiv}1\to 2^{126}\overset{7}{\equiv}1^{21}\overset{7}{\equiv}1\to 2^{126}\times 2^4\overset{7}{\equiv}16$$

$$\to 2^{130}\overset{7}{\equiv}16\overset{7}{\equiv}2\to 2^{130}\overset{7}{\equiv}2\qquad(5)$$

$$(2),(5)\to 3^{130}-2^{130}\overset{7}{\equiv}-3-2=-5,-5\overset{7}{\equiv}2$$

$$\to 3^{130}-2^{130}\overset{7}{\equiv}2\qquad(6)$$

$$(6),(4)\to 3^{130}-2^{130}\overset{7\times 3}{\equiv}2\to(3^{130}-2^{130})\overset{21}{\equiv}2$$

$$\to(3^{130}-2^{130})+25\overset{21}{\equiv}2+25=27\overset{21}{\equiv}6$$

$$\to(3^{130}-2^{130})+25\overset{21}{\equiv}6\to r=6$$

۵ طبق فرض باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ است پس $b\overset{119}{\equiv}25$ و طبق فرض $a\overset{51}{\equiv}b$ لذا داریم:

$$\begin{cases}a\overset{51}{\equiv}b\\ a\overset{119}{\equiv}25\end{cases}\to a\overset{(119,51)}{\equiv}25\to a\overset{17}{\equiv}25$$

$$\to a+9\overset{17}{\equiv}25+9=34\overset{17}{\equiv}0$$

پس باقیماندهٔ $(a+9)$ بر ۱۷ صفر است.

۶ معادل این جمله که «باقیماندهٔ تقسیم هفت برابر x بر ۱۱، مساوی با ۸ است» به‌صورت $7x\overset{11}{\equiv}8$ نوشته می‌شود پس در واقع باید x هایی را بیابیم با فرض $9\le x<50$ که در معادلهٔ همنهشتی بالا صدق کنند: (توجه داریم که به هر طرف یک همنهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.)

$$7x\overset{11}{\equiv}8\to 7x\overset{11}{\equiv}8+55\to 7x\overset{11}{\equiv}63\to 7x\overset{11}{\equiv}7\times 9$$

$$\xrightarrow{(7,11)=1}x\overset{11}{\equiv}9\to x=11K+9$$

$K=0\to x=9$

$K=1\to x=20$

$K=2\to x=31$

$K=3\to x=42$

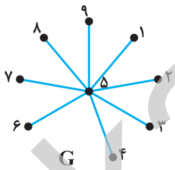
۷

$v=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$E=\{\{x,y\}\mid xy=5k,k\in\mathbb{Z}\}$

$E=\{\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\},\{6,5\},\{7,5\},\{8,5\},\{9,5\}\}$

$\Delta=8,\delta=1\to\Delta-\delta=7$



۸ اگر اندازه را با q و مرتبهٔ G را با p نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$$q=6p-20 \text{ و } G\text{ گرافی ۴ - منتظم است} \to 4p=2q$$

$$\begin{cases}q=6p-20\\ 4p=2q\end{cases}\to\begin{cases}q=6p-20\\ q=2p\end{cases}\to 6p-20=2p$$

$2p=q$

$\to 4p=20$

$\to p=5,q=2p=10$

$\to p+q=5+10=15$

۹ چون گراف G فقط رأس‌های درجهٔ ۲ و ۵ دارد پس $\delta=2$ و $\Delta=5$ از طرفی برای این که بیش‌ترین مقدار برای q را به‌دست آوریم باید درجهٔ رأس‌ها تا حد ممکن بیش‌ترین مقدار باشد یعنی باید حتی‌الامکان درجهٔ رأس‌ها را از درجهٔ ۵ فرض کنیم. (اگر ۷ رأس را از درجهٔ ۵ و ۱ رأس را از درجهٔ ۲ فرض کنیم در این صورت تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، فرد است و این امکان ندارد.)
یعنی باید ۶ رأس از درجهٔ ۵ و ۲ رأس از درجهٔ ۲ داشته باشیم تا q بیش‌ترین مقدار را داشته باشد.

$$\to q_{max}=\frac{(6\times 5)+(2\times 2)}{2}=\frac{34}{2}=17$$

۱۰

$N_G(c)=\{d,b\}\to|N_G(c)|=2$

$N_G[f]=\{f,e,d\}\to|N_G[f]|=3$

$N_G(b)=\{a,c,d\}\to|N_G(b)|=3$

$N_G[d]=\{d,b,c,f,e\}\to|N_G[d]|=5$

$$\to\frac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|}\times\frac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

۱۱ می‌دانیم مجموعهٔ احاطه‌گری مینیمال است که با حذف هر عضو از آن مجموعه، احاطه‌گری از بین برود و آن مجموعه دیگر احاطه‌گر نباشد و می‌دانیم $\gamma=3$ پس:

الف) $D_1=\{a,h,e\}\to$ این مجموعه احاطه‌گر است ولی می‌نیمم است.

ب) $D_2=\{a,i,c,g,e\}\to$ این مجموعه احاطه‌گر بوده و می‌نیمال است زیرا هر عضو آن را حذف کنیم دیگر احاطه‌گر نمی‌باشد.

پ) $D_3=\{b,c,h,e\}\to$ احاطه‌گر نیست

ت) $D_4=\{a,j,d,g\}\to$ این مجموعه نیز احاطه‌گر و می‌نیمال است ولی چون ۴ عضوی است می‌نیمم نمی‌باشد.

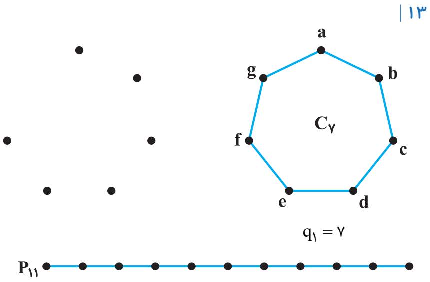
۱۲ الف) عددی حسابی است (تعداد رأس‌های زوج در هر گراف عددی حسابی است.)

ب) ۱۵ (تعداد یال‌های گراف K_7 از تعداد یال‌های گراف K_9، ۱۵ یال کم‌تر است.)

پ) همبند - مسیر

گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۱۳



$q_1=7$

$q_2=10$

$q_2-q_1=10-7=3$

C_7 مجموعه برای $-\gamma=\{a,d,f\}\to$ عدد احاطه‌گری $=3$

(هیچ مجموعهٔ دو عضوی از رأس‌های C_7 نمی‌تواند احاطه‌گر باشد.)

۱۴ ۴ مداد متمایز داریم و ۴ خودکار که متمایزند.

الف) ۴ خودکار را یک شیء فرض کرده که با ۴ مداد روی هم ۵ شیء شده که تعداد !۵ جایگشت داشته و در هر حالت ۴ خودکار در عین حال که کنار هم هستند !۴ جایگشت دارند پس جواب (الف) برابر است با $5!\times 4!$

ب) چون تعداد دو گروه شیء با هم برابر است برای یک در میان قرار گرفتن هم می‌توان با مداد شروع کرد و هم با خودکار یعنی:

$$\overbrace{\text{خ م خ م خ م خ م}}^{4!}_{4!}\to 4!\times 4!$$

$$\overbrace{\text{م خ م خ م خ م خ}}^{4!}_{4!}\to 4!\times 4!$$

جواب $\to 4!\times 4!+4!\times 4!$

۱۵ می‌دانیم همواره «تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی از همان n شیء برابر است» پس تعداد ۵ رقمی‌ها از این ۶ رقم با ۶ رقمی‌ها از همین ۶ رقم برابر است.

$$\text{تعداد ۵ رقمی‌ها}=\text{تعداد ۶ رقمی‌ها}=\frac{6!}{2!\times 2!}=\frac{720}{4}=180$$

برای محاسبهٔ ۴ رقمی‌ها که با این ارقام ۱,۱,۲,۲,۳,۴ می‌توان نوشت باید تعداد حالت‌های زیر را جدا جدا محاسبه و با هم جمع کنیم:

$$\text{۱,۱,۲,۲ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!\times ۲!}=۶$$

$$\text{۱,۱,۲,۳ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۱,۱,۲,۴ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۱,۱,۳,۴ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۲,۲,۳,۱ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۲,۲,۴,۱ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۲,۲,۳,۴ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

$$\text{۱,۲,۳,۴ چهار رقمی‌های شاملِ} \rightarrow ۴!=۲۴$$

$$\text{تعداد کل چهار رقمی‌ها} \rightarrow ۶\times(۱۲)+۶+۲۴=۱۰۲$$

۱۶ | اگر فرض کنیم $x_i\ (۱\le i\le ۴)$ تعداد انتخاب‌ها از غذای نوع i ام باشد در این صورت تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$ جوابِ مسأله می‌باشد.

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} \rightarrow \binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}$$

$$=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{۳!\times \cancel{۷!}}=۱۲۰$$

۱۷ | برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+\sqrt{x_۲}+x_۳+x_۴=۴$ برای $x_۲$ مقادیر ۱۶,۹,۴,۱,۰ که همگی مربع کامل هستند را در نظر گرفته و در هر حالت جواب‌های صحیح و نامنفی را به‌دست آورده و همه را با هم جمع می‌کنیم.

$$x_۲=۰\rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۴$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$x_۲=۱\rightarrow x_۱+\sqrt{۱}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$x_۲=۴\rightarrow x_۱+\sqrt{۴}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۴}{۲}=۶$$

$$x_۲=۹\rightarrow x_۱+\sqrt{۹}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۳}{۲}=۳$$

$$x_۲=۱۶\rightarrow x_۱+\sqrt{۱۶}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۰$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۲}{۲}=۱$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها}=۱۵+۱۰+۶+۳+۱=۳۵$$

۱۸ |

الف)

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}\xrightarrow[۱\rightarrow ۳,۴\rightarrow ۱]{۳\rightarrow ۴,۲\rightarrow ۲}B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۲&۳&۱&۴\\\hline ۴&۱&۳&۲\\\hline ۳&۲&۴&۱\\\hline ۱&۴&۲&۳\\\hline\end{array}$$

ب) اگر این دو مربع لاتین را روی هم قرار دهیم خواهیم داشت:

۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

چون اعداد دورقمی و تکراری در خانه‌های این مربع جدید مشاهده می‌شود پس A و B متعامد نیستند.

۱۹ |

$$K+۱=۹\rightarrow K=۸$$

$$n=۱۲\times ۷=۸۴$$

$$Kn+۱=۸\times(۸۴)+۱=۶۷۳$$

(طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، هرگاه $(Kn+۱)$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، حداقل ۱ لانه هست که در آن حداقل $(K+۱)$ کبوتر قرار خواهد داشت.)

۲۰ | مجموعه‌های A ، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\{۱\le n\le ۲۰۰|۴|n\}$$

$$B=\{۱\le n\le ۲۰۰|۶|n\}$$

$$C=\{۱\le n\le ۲۰۰|۵|n\}$$

واضح است که تعداد اعضای مجموعهٔ $(A'\cap B'\cap C')$ موردنظر است.

$$|(A'\cap B'\cap C')|=|(A\cup B\cup C)'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$|S|=۲۰۰,|A|=\frac{۲۰۰}{۴}=۵۰,|B|=\left[\frac{۲۰۰}{۶}\right]=۳۳,|C|=\frac{۲۰۰}{۵}=۴۰$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۶]}\right]=\left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]=۱۶,|A\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۵]}\right]$$

$$=\left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right]=۱۰$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۶,۵]}\right]=\left[\frac{۲۰۰}{۳۰}\right]=۶,|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۶,۵]}\right]$$

$$=\left[\frac{۲۰۰}{۶۰}\right]=۳$$

$$|S|-|A\cup B\cup C|=۲۰۰-(۵۰+۳۳+۴۰-۱۶-۱۰$$

$$-۶+۳)=\underline{۹۴}$$

$$(|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$$

$$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$

نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی- تجربی- انسانی)

ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱| کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است؟ نادرستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض نشان دهید.

الف) اگر n^2 مضرب ۸ باشد آنگاه n مضرب ۸ است.

ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ عددی گنگ است.

پ) اگر $a \mid b^2$ آنگاه $a \mid b$.

ت) اگر $a^m \mid b^n$ و $m \geq n$ آنگاه $a \mid b$.

۲| اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵ و ۷ به‌ترتیب ۱ و ۴ باشد، باقیماندهٔ تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

۳| اگر $7 \mid 3k-1$ و $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید $49 \mid 21k^3+2k^2+15k-6$.

۴| باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=(3^{130}-2^{130})+25$ را بر عدد ۲۱ بیابید.

۵| اگر $a \overset{51}{\equiv} b$ و باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ باشد، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم $(a+9)$ را بر ۱۷ بیابید.

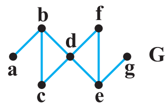
۶| اعداد طبیعی چون x بیابید که ۷ برابر آن‌ها را اگر بر ۱۱ تقسیم کنیم، باقیماندهٔ تقسیم برابر با ۸ می‌شود، با فرض $9 \leq x < 50$.

۷| گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E=\{\{x,y\} \mid xy=5k, k\in\mathbb{Z}\}$ را رسم کرده و حاصل $(\Delta-\delta)$ را به‌دست آورید.

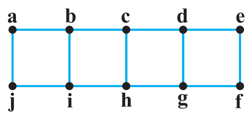
۸| اگر اندازهٔ گراف G از ۶ برابر مرتبهٔ آن ۲۰ واحد کم‌تر باشد و G گرافی ۴− منتظم باشد، مجموع مرتبه و اندازهٔ این گراف را بیابید.

۹| گراف G از مرتبهٔ ۸ فقط رأس‌های از درجهٔ ۲ و ۵ دارد در این گراف بیش‌ترین مقدار برای اندازهٔ (q) را بیابید.

۱۰| با توجه به گراف G حاصل عبارت $\dfrac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}\times\dfrac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|}$ را بیابید.



۱۱| با توجه به گراف زیر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای احاطه‌گر و می‌نیمال است اما می‌نیمم نمی‌باشد؟ (با ذکر دلیل)



الف) $D_1=\{a,h,e\}$

ب) $D_2=\{a,i,c,g,e\}$

پ) $D_3=\{b,c,h,e\}$

ت) $D_4=\{a,j,d,g\}$

۱۲| جاهای خالی را با عدد یا کلمات مناسب پر کنید.

الف) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ....

ب) تعداد یال‌های گراف K_7 از تعداد یال‌های گراف K_9، .... یال کم‌تر است.

پ) گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک .... وجود داشته باشد.

۱۳| ابتدا اختلاف تعداد یال‌های گراف P_{11} و C_7 را بیابید و سپس یک γ− مجموعه برای گراف C_7 بنویسید و عدد احاطه‌گری آن را مشخص کنید.

۱۴| ۴ مداد متمایز و ۴ خودکار متمایز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند هرگاه بخواهیم:

الف) همواره خودکارها کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک در میان قرار بگیرند.

۱۵| با ارقام ۱،۱،۲،۲،۳،۴ چند عدد <u>پنج رقمی</u> و چند عدد <u>چهار رقمی</u> می‌توان نوشت؟

۱۶| ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در یک رستوران که فقط ۴ نوع غذا دارد، سفارش غذا بدهند به شرط آن که هر نفر فقط یک پرس غذا سفارش بدهد؟

۱۷| معادلهٔ $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۸| الف) مربع لاتین A را درنظر بگیرید. با اعمال جایگشت $3\to1$ و $2\to2$ و $4\to3$ و $1\to4$ مربع لاتین B را به‌دست آورید.

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ (با ذکر دلیل)

$A=$

۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱۹| در یک دانشکده حداقل چند دانشجو مشغول تحصیل باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۹ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است؟

۲۰| چه تعداد عدد طبیعی مانند n که $1 \leq n \leq 200$ وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر نباشند و بر ۶ بخش‌پذیر نباشند و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند؟