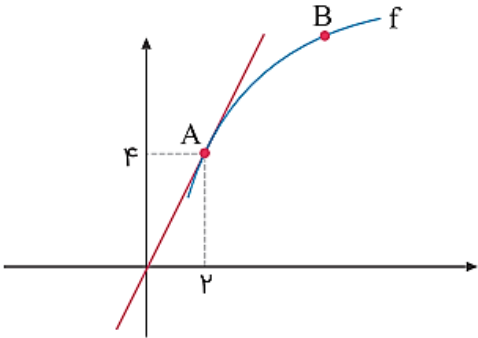


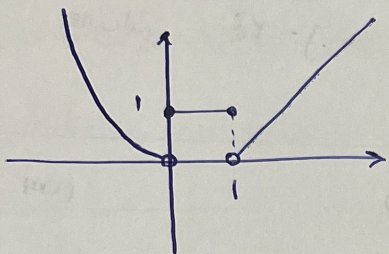
نام و نام خانوادگی		باسمه تعالی		تاریخ امتحان: / / 1401
.....		اداره کل آموزش و پرورش استان گیلان		تعداد صفحات: 2 صفحه
نام آموزشگاه:		سوالات امتحان پنجره ارتقاء درس حسابان 2		مدت امتحان: 100 دقیقه
رشته: ریاضی و فیزیک		دانش آموزان/ داوطلبان آزاد دوره دوم متوسطه پایه دوازدهم		ساعت شروع:
ردیف	سوالات	نمره		
1	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) ماکسیمم تابع $f(x) = 3 \sin(x) - 2$ برابر است.</p> <p>ب) تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دارای نقطه بحرانی است.</p> <p>ج) دامنه تابع $h(x) = \tan(3x)$ برابر است.</p> <p>د) حاصل نامعادله $x^2 \geq x^3$ بازه است.</p>	1		
2	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تابع $f(x) = (x-1)^3$ روی دامنه خود اکیدا صعودی است.</p> <p>ب) تابع $g(x) = x^2 - 1$ در دو نقطه مشتق پذیر نیست.</p> <p>ج) تابع $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ مجانب افقی ندارد.</p> <p>د) اگر تابع $k(x)$ در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه $k(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر است.</p>	1		
3	<p>ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن تابع، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$	1		
4	<p>نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.</p>  <p>الف) نمودار تابع $y = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید.</p> <p>ب) دامنه تابع $y = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$ را تعیین کنید.</p>	1		
5	معادله مثلثاتی $\cos(x)(2 \cos(x) - 9) = 5$ را حل کنید.	1.5		
6	<p>حدود زیر را محاسبه کنید.</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{5 - 3x}$ <p>ادامه در صفحه 2</p>	1.25		

1	<p style="text-align: center;">صفحه 2</p> <p>اگر تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{ax^2 + 2x + 8}$ فقط دارای یک مجانب قائم باشد، مقدار a را به دست آورید و مشخص کنید مجانب افقی تابع f محور y ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟ ($a \neq 0$)</p>	7
1.5	<p>نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:</p>  <p>الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را به دست آورید. ب) شیب خط های مماس در نقاط A, B را مقایسه کنید.</p>	8
2.25	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ $g(x) = x^2(\sqrt{x+1})$	9
1.5	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. ب) نمودار تابع f' را رسم کنید.</p>	10
1	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در این بازه زمانی با هم برابرند.</p>	11
2	<p>مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x+2}$ را در بازه $[-1, 3]$ بیابید.</p>	12
2.5	<p>جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ را رسم کنید.</p>	13
1.5	<p>اگر نقطه $w(1, -4)$، نقطه عطف منحنی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$ باشد، آنگاه مقادیر a, b را به دست آورید.</p>	14

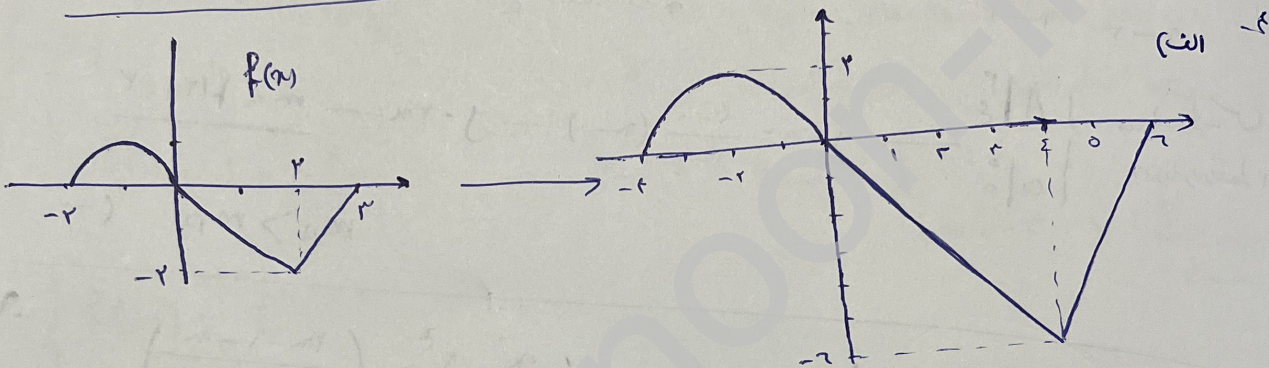
موفق باشید

۱- الف) ۱ $x=0$ ب) $x \neq \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$ ج) $(-\infty, 1]$

۲- الف) درست ب) درست ج) نامرئی د) نامرئی



ترویج الکترون $(-\infty, 0)$
 ثابت $[0, 1]$
 مقهور الکترون $(1, +\infty)$



۳- الف) $D = [-4, 4]$ ب)

۴- $2\cos^2 x - 9\cos x - 2 = 0$

$\Delta = 121$ $\cos x = \frac{9 \pm 11}{4}$ $\begin{cases} \rightarrow \cos x = 2 \\ \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ X

$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۵- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x} \stackrel{0/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |2x|}{-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-3x} = \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{rx^r - rx + 1}{ax^r + rx + 1}$$

-7

حون فقط يك جانب دارم پس خيج ريشه استاندارد

$$\Delta = r^2 - 4ra = 0 \rightarrow a = \frac{r}{4}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^r - rx + 1}{\frac{1}{4}x^r + rx + 1} \stackrel{\text{موازى}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^r}{\frac{1}{4}x^r} = 4r \quad y = 4r \quad \text{كاتبه لى}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = f'(r) = \text{نقطه سنجش} \quad \text{تابع در نقطه } x=r$$

مشتق در نقطه $x=r$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشتق در نقطه} \\ x=r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{f}' \\ \text{E} \\ \text{O} \\ \text{O} \end{array} \rightarrow y = 0 = \frac{r-r}{r-r} (x-r) \rightarrow y = rx \rightarrow m = f'(r) = r$$

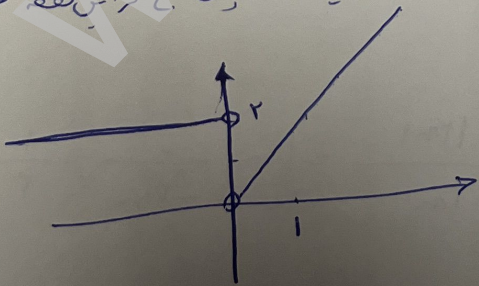
$$m_A > m_B \quad (-)$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{rx-1}\right)^a \rightarrow f'(x) = a \left(\frac{x}{rx-1}\right)^{a-1} \times \left(\frac{rx-1-x}{(rx-1)^2}\right)$$

$$g(x) = x^r(\sqrt{x+1}) \rightarrow g'(x) = rx\sqrt{x+1} + x^r \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} rx-1 & x < 0 \\ x^r-1 & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} r & x < 0 \\ rx & x \geq 0 \end{cases}$$

حون مشتق تابع در نقطه $x=0$ داراى مشتق دوگانه است برابريت بين مشتق در نقطه مشتق در



مشتق در نقطه $f'(x)$

تعمیرات - ۳

$$f(t) = t^2 - t + 1$$

۱۱

سرعت متوسط در بازه [۰,۵] $V = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 1}{5} = 4$

سرعت لحظاتی $V(t) = f'(t) = 2t - 1$

سرعت لحظاتی = سرعت متوسط $\rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$

$f(x) = x + \frac{4}{x+2}$
[۱,۳]

۱۲ - برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق کافی است مقادیر تابع را در نقاط ابتدا انتهای بازه را در نظر بگیریم و مقادیر آن را مقایسه کنیم

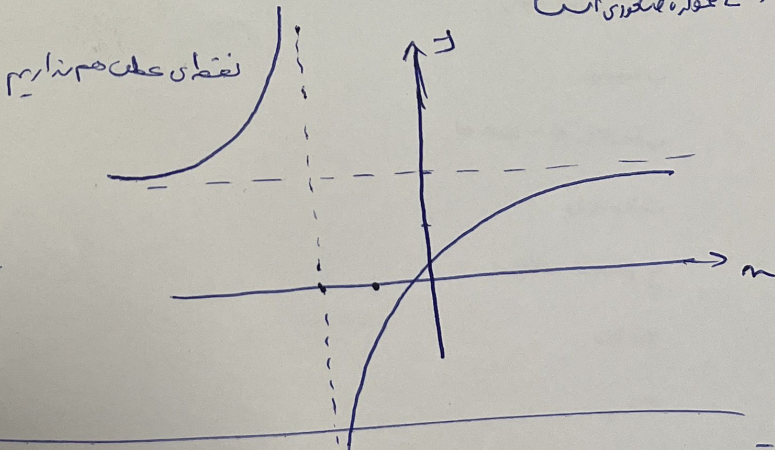
$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$
در بازه [۱,۳] فقط $x = 0$ در نظر بگیریم

$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 4 \\ f(0) &= 2 \rightarrow \text{نقطه مینیمم مطلق} \\ f(3) &= \frac{24}{5} \rightarrow \text{نقطه ماکسیمم مطلق} \end{aligned} \right\}$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ $D: \mathbb{R} - \{-2\}$ $f'(x) = \frac{2x + 2 - (x^2 - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x + 2)^2}$ ۱۳

$f''(x) = \frac{-2x}{(x + 2)^3}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$-$
f	2	0	2



$w(1, -2)$ استریم $\rightarrow \begin{cases} f''(1) = 0 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a \rightarrow f''(1) = 2 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$

$f(x) = ax^2 - 2x + b + c$

$f(1) = 1 - 2 + b + c = -2 \rightarrow b + c = -1$

$b = -1$

باسمِ تشریحی حسابان ۲
استان گیلان

علیرضا زارعی

دانش آموخته مهندسی برق - صنعتی شریف

دانشجوی پزشکی - علوم پزشکی ایران

www-kanon.ir

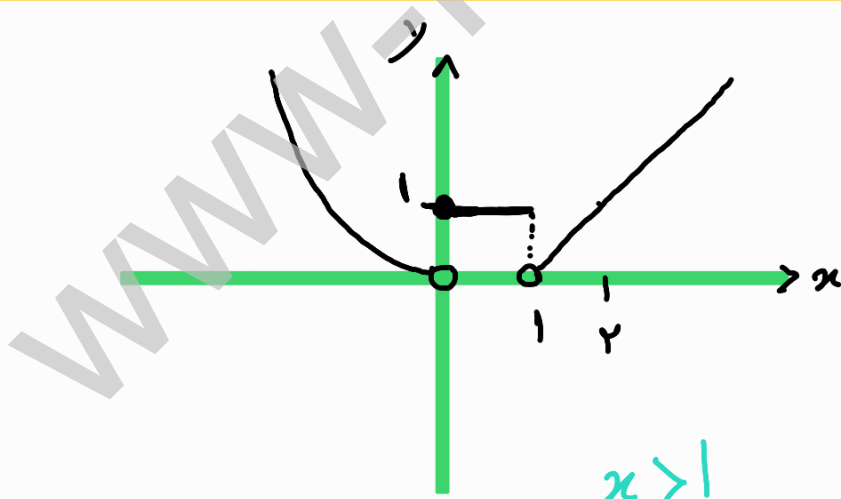
①

الف) $x \leq 1$!
 ب) صفر
 ج) $\mathbb{R} - \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

②

الف) \rightarrow درست
 ب) \rightarrow درست
 ج) \rightarrow نادرست
 د) \rightarrow نادرست

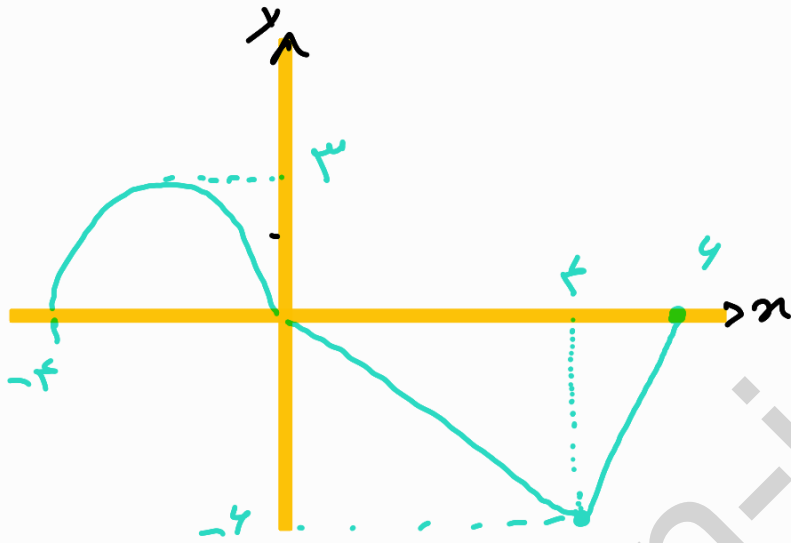
③



صعودی الیڈ $\Leftarrow x > 1$
 ثابت $\Leftarrow 0 \leq x \leq 1$
 نزولی الیڈ $\Leftarrow x < 0$

(4)

الف) طول نقاط ۲ برابر و عرض نقاط تابع ۳ برابر می شوند.



ب) دامنه تابع $[-4, 4]$ است

(5)

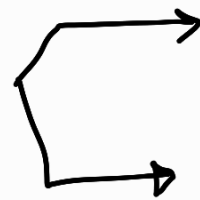
$$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 + 40 = 121$$

$$t = \frac{9 \pm 11}{4}$$



$$t = 5$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

ع.ق.ق

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{\Delta - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |2x|}{\Delta - 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x}{\Delta - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2}$

$\Delta \neq 0$ است پس معادله درجه دوم خارج باد
 دارای سه مضاعف باشد یعنی $\Delta = 0$



$32a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

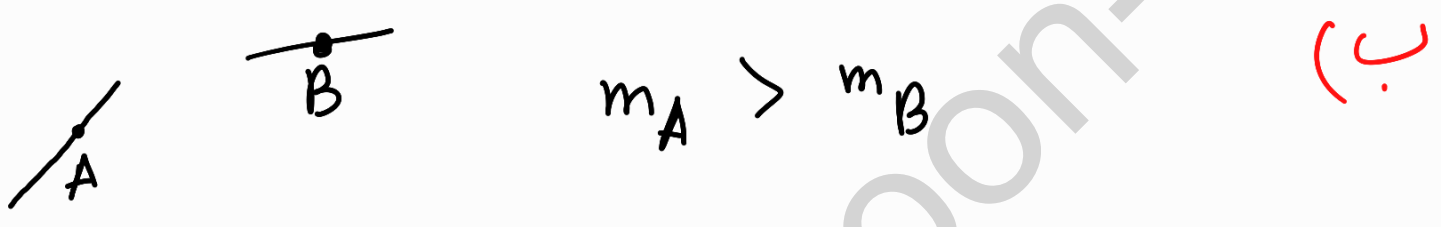
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\frac{1}{8}x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{8}x^2} = 24$

مجاذب افقی $y = 24$ است محور y را در نقطه $(0, 24)$ قطع می‌کند.

۸

الف) حاصله همان مشتق تابع f در نقطه ۲ است که برابر با سیب نقطه $(۲, ۲)$ است.

$$m_d = \frac{f}{۲} = ۲$$



۹

الف)

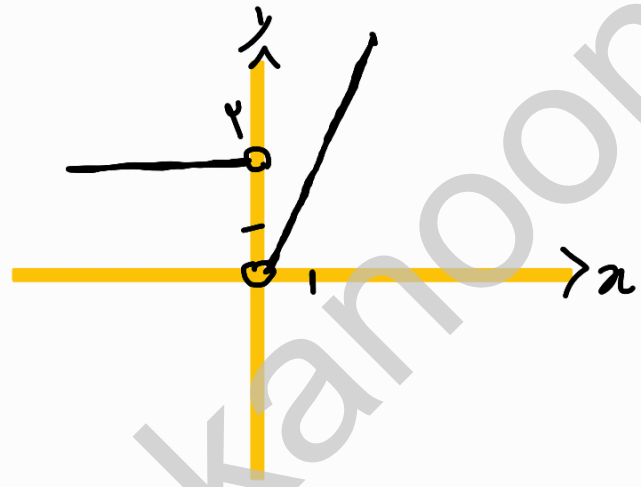
$$f'(x) = d \left(\frac{x}{2x-1} \right)^k \left(\frac{2x-1 - 2x}{(2x-1)^2} \right)$$
$$= d \left(\frac{x}{2x-1} \right)^k \left(\frac{-1}{(2x-1)^2} \right)$$

ب)

$$g'(x) = 2x \left(\sqrt{x+1} \right) + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

در $x=0$ تابع پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.



ب)

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(d) - f(0)}{d - 0} = \frac{2d - d + 10 - 10}{d} = 1$$

$$f'(t) = 2t - 1 \qquad f'(t_0) = 2t_0 - 1$$

$$2t_0 - 1 = 1 \Rightarrow t_0 = 1$$

در این لحظه برابرند

محاسبه بحرانی (۳، -۱)

$$f'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$x+2 = \pm 2 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

حال مقادیر $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(3)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(0) = 2 \rightarrow \text{min مطلق}$$

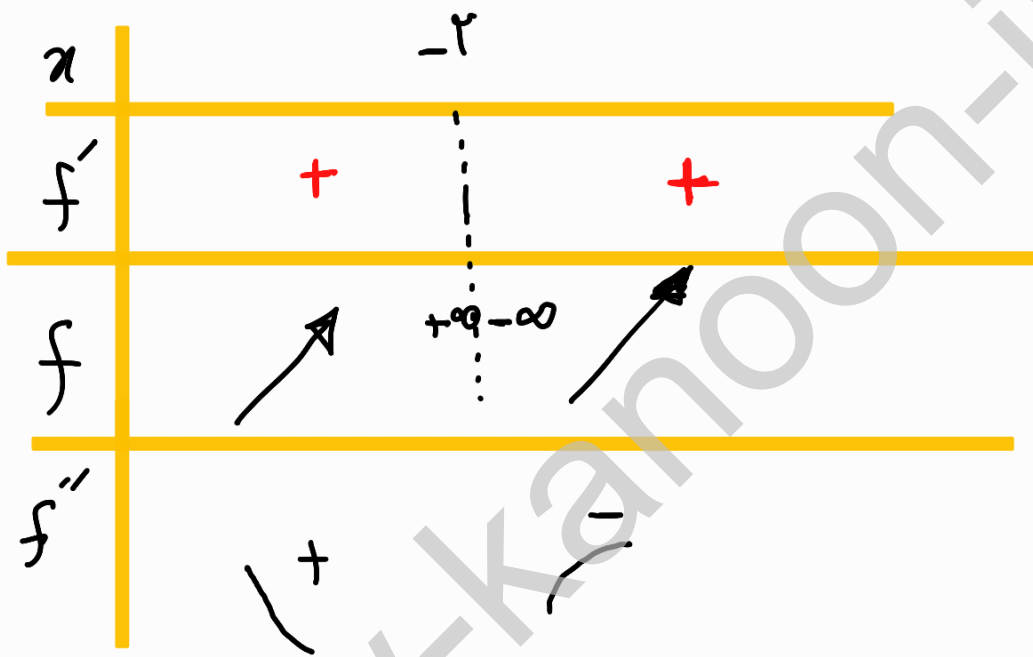
$$f(-1) = 4$$

$$f(3) = \frac{24}{5} \rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f'(x) = \frac{r(x+r) - (ra-1)}{(x+r)^r}$$

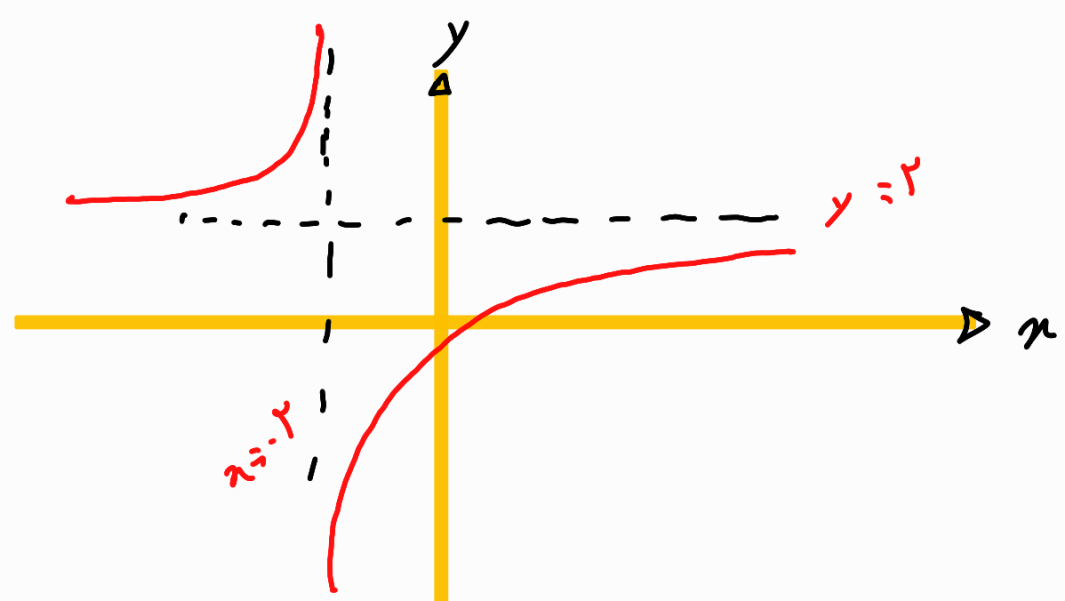
$$f'(x) = \frac{a}{(x+r)^r}$$

$$f''(x) = \frac{-10}{(x+r)^{r+1}}$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = r$$

مجاہب افقی $y = r$



$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 4x + 2a$$

$$f''(1) = 0$$

$$4 + 2a = 0$$

$$a = -2$$

$$f(1) = -1 \implies a = -2 \implies$$

$$1 + a + b + 1 = -1$$

$$a + b = -3$$

$$b = -1$$