

پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته: ریاضی و فیزیک	
مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه		تعداد صفحه: ۴	
نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۲/۰۴	
ردیف		سؤالات	
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $A(2,1)$ روی تابع $f(x-1)$ باشد آن گاه مختصات نقطه $A'$ متناظر روی تابع $f(x)$ برابر ..... می باشد. ب) باقی مانده تقسیم $a^{2n+1} - x^{2n+1}$ بر $x + a$ برابر است با..... پ) دامنه تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ مجموعه ..... است.	۰/۷۵	نمره
۲	گزینه های درست را با $\checkmark$ و گزینه های نادرست را با علامت $\times$ مشخص کنید. الف) اگر تابع صعودی باشد آن گاه آهنگ تغییر متوسط آن نیز صعودی است. ب) هر نقطه ای که مشتق ناپذیر باشد آن نقطه بحرانی نیز می باشد. ج) اگر مشتق تابعی در یک نقطه موجود و آن نقطه اکسترمم نسبی باشد آن گاه مشتق تابع در آن نقطه صفر است.	۰/۷۵	نمره
۳	الف) رسم $f$ ب) ضابطه معکوس $f(x)$ اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ باشد. مطلوب است:	۱/۵	نمره
۴	در تابع $f(x) = \sqrt{3} - \sin(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6})$ مقادیر ماکزیمم و دوره تناوب را به دست آورید.	۱	نمره
۵	جواب های کلی معادله مثلثاتی مقابل را بنویسید. $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(2x)$	۱	نمره

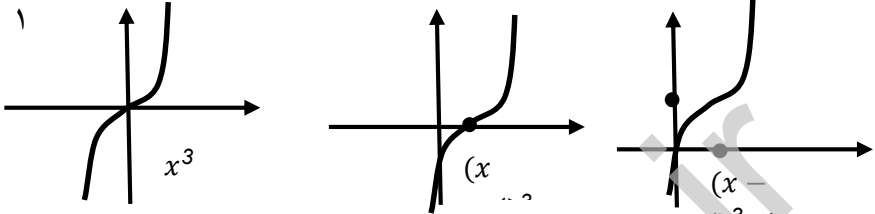

<p>۱/۵</p>	<p>حاصل حدهای زیر را بیابید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{4x^2 - 5x + 7}</math></p>	<p>۶</p>
<p>۱</p>	<p>شکل تابع <math>f(x) = \frac{1}{x+ x }</math> را حول مجانب قائم آن رسم کنید.</p>	<p>۷</p>
<p>۱</p>	<p>می‌دانیم تابع <math>f</math> مشتق پذیر است. اگر <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x+3} - 2} = \frac{-1}{3}</math> آن گاه مقدار <math>f'(1)</math> را به دست آورید.</p>	<p>۸</p>
<p>۱/۵</p>	<p>مشتق ضابطه‌های زیر بیابید. (ساده کردن الزامی نیست)</p> <p>الف) <math>f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 - 3x}</math></p> <p>ب) <math>f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan \frac{2}{x}</math></p>	<p>۹</p>

۱/۵	<p>مقدار <math>a</math> و <math>b</math> را طوری به دست آورید که تابع داده شده در نقطه <math>x = 1</math> مشتق پذیر است.</p> $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 3 & x \geq 1 \end{cases}$	۱۰			
۱/۵	<p>اگر <math>f(x) = x x - 2 </math>، آن گاه ابتدا تابع <math>f</math> را رسم کنید و سپس ضابطه تابع <math>f'</math> را به دست آورده و آنرا رسم کنید.</p>	۱۱			
۱/۵	<p>در هر گزینه تابع با شرایط خواسته شده را رسم کنید.</p> <table border="1" data-bbox="188 1064 1428 1713"> <tr> <td data-bbox="188 1064 603 1713"> <p>(ج) در نقطه ای جهت تفرع عوض می شود اما آن نقطه، نقطه عطف نباشد.</p> </td> <td data-bbox="603 1064 1013 1713"> <p>(ب) دارای نقطه ای است که اکسترمم نسبی باشد ولی مشتق در آن نقطه موجود نباشد.</p> </td> <td data-bbox="1013 1064 1428 1713"> <p>(الف) مشتق در نقطه ای از آن صفر باشد اما در آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد.</p> </td> </tr> </table>	<p>(ج) در نقطه ای جهت تفرع عوض می شود اما آن نقطه، نقطه عطف نباشد.</p>	<p>(ب) دارای نقطه ای است که اکسترمم نسبی باشد ولی مشتق در آن نقطه موجود نباشد.</p>	<p>(الف) مشتق در نقطه ای از آن صفر باشد اما در آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد.</p>	۱۲
<p>(ج) در نقطه ای جهت تفرع عوض می شود اما آن نقطه، نقطه عطف نباشد.</p>	<p>(ب) دارای نقطه ای است که اکسترمم نسبی باشد ولی مشتق در آن نقطه موجود نباشد.</p>	<p>(الف) مشتق در نقطه ای از آن صفر باشد اما در آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد.</p>			
۱/۵	<p>برای تابع <math>f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1</math> مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی در بازه <math>[1, 4]</math> را پیدا کنید.</p>	۱۳			

۱	جهت تقعر برای تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.	۱۴
۱,۵	مقادیر $a$ ، $b$ و $c$ را طوری به دست آورید که نقطه $(1, -2)$ عطف $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بوده و در نقطه‌ای به طول $1$ - اکسترمم نسبی داشته باشد.	۱۵
۱,۵	نمودار و جدول تغییرات $f(x) = \frac{1-3x}{x-2}$ را رسم کنید.	۱۶
۲۰	تلاش جادویی است که موفقیت را می سازد.	

پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه:	مدت امتحان:
سئوالات امتحان شبه نهایی درس: حسابان (۲)		تاریخ امتحان: ۱۴۰۲//	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع:	
ردیف	نمره		

### راهنمای تصحیح

۱	الف) $A'(1, \frac{1}{k})$ ب) $-2a^{2n+1}$ پ) $x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$
۲	الف) نادرست    ب) نادرست    پ) درست
۳	الف) $f(x) = (x-1)^3 + 1$  ب) $y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x-1 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1} + 1 = x$
۴	$Max =  a  + c =  -1  + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ $f(x) = a \sin bx + c$ $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{ \frac{1}{2} } = 4\pi$
۵	$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(2x) \Rightarrow -\cos(2x) = \sin(2x)$ $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2x) = \sin(2x) \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{3\pi}{2} + 2x) \text{ جواب ندارد} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{2} + 2x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$
۶	الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{4x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 2}{4x^2 - 5x + 7} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{4x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
۷	$x +  x  = 0 \Rightarrow x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x +  x } = \frac{1}{2} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x -  x } = \frac{1}{0}$ تعریف نشده 
۸	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x+3} - 2} \times \frac{(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - f(1))(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)} \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} + 2) = \frac{-1}{3} \Rightarrow f'(1) \times 4 = \frac{-1}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{12}$

الف)  $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x + 2(1 + \tan^2 x)\tan x$

ب)  $f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{3x+2}}\right)(x^2+1)^2 + 2(3x^2)(x^2+1)\sqrt{3x+2}$

الف)  $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)(x^2-3x) - (2x-3)(\sqrt[3]{x+1})}{(x^2-3x)^2}$

ب)  $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{x^2}\left(1 + \tan^2\frac{2}{x}\right)$

۹

شرط پیوستگی

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$f(1) = a + b = 2$$

شرط مشتق پذیری

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

۱۰

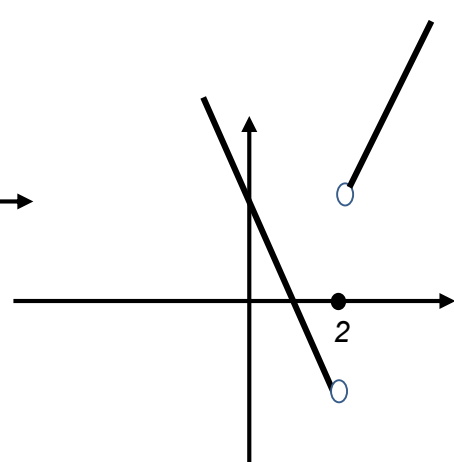
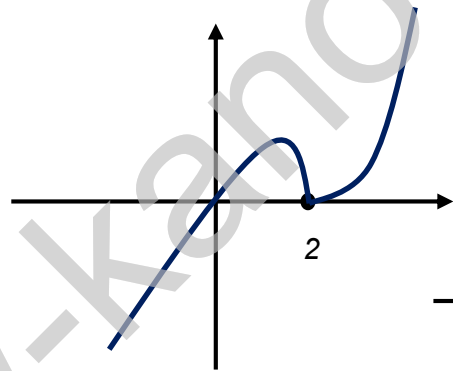
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(ax^2 + bx) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2\sqrt{4x-3}) - 2}{x - 1}$$

$$2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 2$$

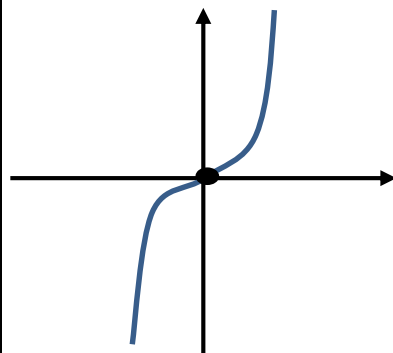
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 2 \\ -x^2 + 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ -2x + 2 & x < 2 \end{cases}$$



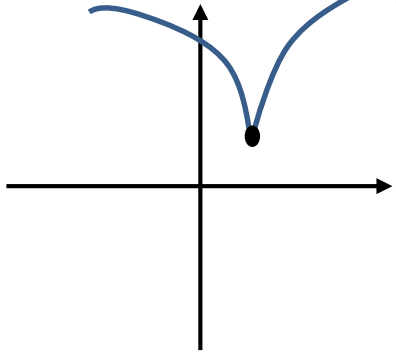
۱۱

الف

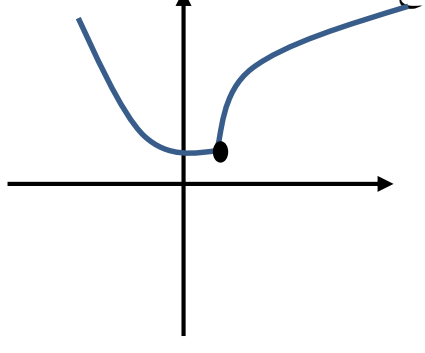


۱۲

ب.



ج.



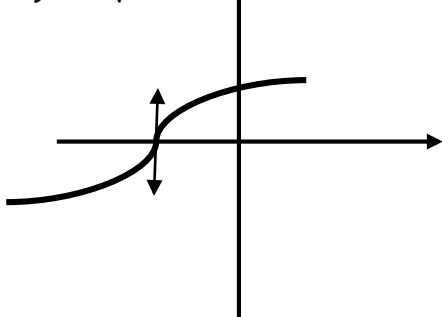
$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} x = 3 \in [1, 4] \\ x = -\frac{1}{3} \notin [1, 4] \end{cases}$$

x	y	
3	-17	min مطلق و نسبی
1	-7	Max مطلق

x	1	3	4
f'	-	+	
f	↘	↗	

۱۳

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$



با توجه به شکل داریم:

$$x \geq -2 \leftarrow \text{تقعر رو به پایین}$$

$$x \leq -2 \leftarrow \text{تقعر رو به بالا}$$

و  $x = -2$  عطف است. زیرا جهت تقعر تغییر کرده و خط مماس در آن موجود است.

۱۴

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$$

$$-2 = 1 + a + b + c$$

$$(1, -2) \left\{ \begin{aligned} f''(x) = 6x + 2a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -9, c = 9 \end{aligned} \right.$$

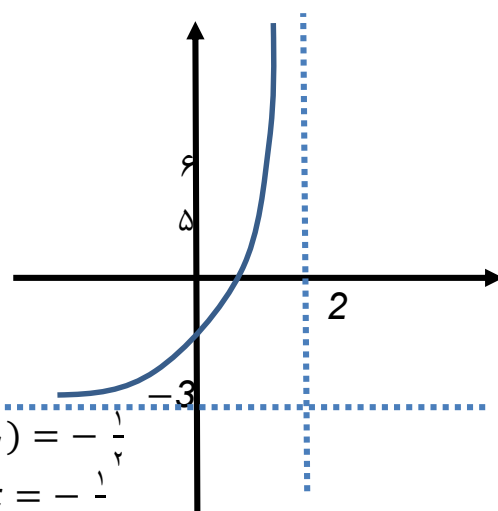
۱۵

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مجانب قائم} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{-3x}{x} = -3 \Rightarrow y = -3 \text{ مجانب افقی} \end{cases}$$

$$y' = \frac{-3(x-2) - (-3x+1)}{(x-2)^2} = \frac{5}{(x-2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	+	
f	↗	↗	

$$\begin{aligned} \text{برخورد با محور } y &\rightarrow f(0) = -\frac{1}{2} \\ \text{برخورد با محور } x &\rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



۱۶