باسمه تعالی

سوال امتحان راه نهایی درس: حسابان(۲)	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد سوال: ۱۸	تعداد صفحه: ۲
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون هماهنگ راه نهایی دانش آموزان پایه دوازدهم مدارس دولتی و غیردولتی استان مازندران

معاونت آموزش متوسطه استان مازندران
http://motvasete-mazand.medu.ir

ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. | نمره

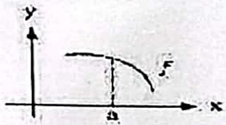
۱ (نمره: ۱)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ کافی است نمودار تابع f را ۱ واحد به راست منتقل و سپس طول نقاط را نصف کنیم. د☐ ن☐

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$ د☐ ن☐

ج) تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست و خط $x = 0$ مماس قائم منحنی است. د☐ ن☐



د) با توجه به نمودار تابع f داریم: $f''(a) > 0$ د☐ ن☐

۲ (نمره: ۱)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $f(x+1)$ برابر ...... است.

ب) اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، آنگاه ...... $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n$

ج) اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4$ و $f(1) = 3$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - 3}{h}$ برابر .... است.

د) معادله مجانب قائم تابع $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ برابر .... است.

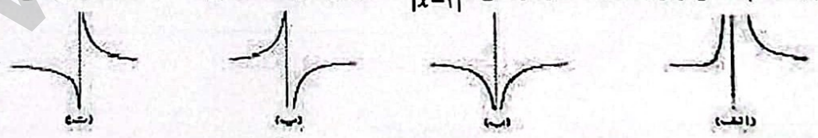
۳ (نمره: ۱)

در سوالات چهار گزینه‌ای زیر گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر $(g+f)(2) = 5$ و $g(2) = 4$ و $g'(2) = 3$ و $f'(2) = -1$ باشد، حاصل $(gf - 3f)'(2)$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۲-

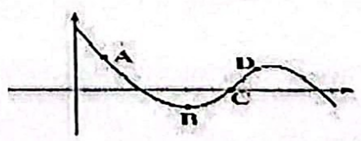
ب) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $y = \dfrac{-x+1}{|x-2|}$ را در همسایگی $x = 2$ نمایش می دهد؟



۱) (الف) ۲) (ب) ۳) (پ) ۴) (ت)

۴ (نمره: ۰/۷۵)

نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یکی از نقاط اضافی است)



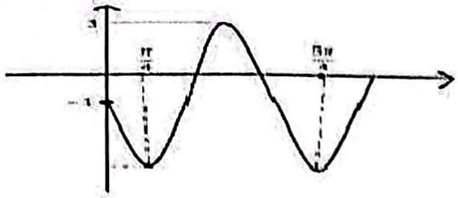
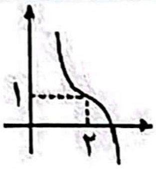
شیب	۱	$\frac{1}{2}$	۲-
نقطه			

۵ (نمره: ۱)

اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله ای $f(x) = x^3 + ax^2 + x - 3$ بر $x - 1$ برابر ۵ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۶ (نمره: ۱)

اگر $\log_{0/1}(2x - 1) \geq \log_{0/1}(x + 1)$ باشد، آنگاه حدود x را به دست آورید

ردیف	سؤال	بارم
۷	معادله داده شده را حل کنید. $\cos 2x - \sin x = 0$	۰/۷۵
۸	معادله نمودار تابع مثلثاتی مقابل را بنویسید. 	۱/۲۵
۹	اگر نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-2}{f(x)-1}$ را بنویسید. 	۰/۵
۱۰	حاصل $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را بدست آورید.	۰/۷۵
۱۱	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $y = \tan(\sqrt[3]{x} + 2x)$ ب) $y = \sqrt{\frac{3x+1}{2x+5}}$	۱/۵
۱۳	اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$، آنگاه معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=(gof)(x)$ را در نقطهٔ $A(4,\frac{1}{2})$ بنویسید.	۱
۱۴	در تابع با ضابطه $f(x)=x^2-1$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[2 , 2+a]$ برابر آهنگ لحظه ای تغییر در $x=4$ است. مقدار a را بدست آورید.	۱/۲۵
۱۵	در کره‌ای به شعاع $R=2$ استوانه ای محاط کرده ایم، ارتفاع استوانه را طوری بیابید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. (شعاع قاعده استوانه را r و ارتفاع آن را h فرض کنید)	۱
۱۶	با توجه به نمودار تابع f' به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) نقطه‌ای که در آن تابع f مینیمم نسبی دارد؟ چرا؟ ب) نقطه‌ای که در آن تابع f ماکزیمم نسبی دارد؟ چرا؟ ج) نقاط بحرانی تابع f را در صورت وجود بنویسید. 	۱/۵
۱۷	مقادیر a و b را طوری بدست آورید که نقطه‌ی $(1 , -1)$ نقطه عطف تابع $y=ax^3+bx^2+1$ باشد.	۱/۵
۱۸	جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x}{x-4}$ را رسم کنید.	۲
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۲۰

حسابان ۳

۱) الف) درست

ب) درست

ج) درست

د) نادرست

---

۲) الف) $[-3, 3]$

ب) $+\infty$

ج) ۳

د) $x=1$

---

۳) الف) درجه ۳

ب) درجه ۲

---

۴)

شیب	1	$\frac{1}{2}$	-3
نقطه	C	D	A

---

۵) $f(1)=5 \rightarrow 1+a+1-3=5 \rightarrow a-1=5 \rightarrow \boxed{a=6}$

$x-1=0 \quad \boxed{x=1}$

---

۶) تابع نزولی است $\longleftarrow$ $x+1 \leq 2x-1$

$\boxed{2 \leq x}$

۱۰ ۱ ۱...

۷)

$$\cos 2x - \sin x = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(2) = 9$$

$$\sin x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{4} = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

---

۸)

$$\max = 3 \rightarrow a = 4 \rightarrow \min = -5$$

$$c = -1$$

---

۹)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-2}{f(x)-1} = \frac{-2}{1^+ - 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

---

۱۱)

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x + 1 - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

موفق و پیروز باشید

۱۰)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = +\infty + 1 = \boxed{+\infty}$$

(۱۲

الف) $y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)\left(1 + \tan^2(\sqrt{x} + 2x)\right)$

ب) $$y' = \frac{\frac{3(2x+5) - 2(3x+1)}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x+5}}}$$

(۱۳

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$y = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$A(4, \frac{1}{2}) \longrightarrow y' = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot x}$

$y'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{4}\times 4} = \boxed{-\frac{1}{16}} = m$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}(x - 4)}$$

(۱۴

$f(x) = x^2 - 1$ آهنگ متوسط = آهنگ لحظه‌ای $= f'(4) = 8$

$\boxed{[2, 2+a]}$

$f'(x) = 2x \longrightarrow \boxed{f'(4) = 2(4) = 8}$

آهنگ متوسط $= \frac{f(2+a) - f(2)}{2+a-2} = \frac{(2+a)^2 - 1 - (2^2 - 1)}{a} = \frac{(2+a)^2 - 4}{a} = 8$

$(2+a)^2 - 4 = 8a$

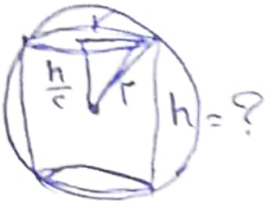
$\cancel{4} + 4a + a^2 - \cancel{4} = 8a$

$a^2 - 4a = 0 \longrightarrow a(a-4) = 0$

$a = 0$ غ ق ق

$a = 4$ ✓

۱۵)



$$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 2^2 \longrightarrow \boxed{4r^2+h^2=16} \longrightarrow r^2=\frac{16-h^2}{4}$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 . h =$$

$$V = \pi\left(\frac{16-h^2}{4}\right).h = 8\pi h - \pi\frac{h^3}{4}$$

$$V' = 8\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \longrightarrow \frac{3\pi}{4}h^2 = 8\pi$$

$$h^2 = \frac{4\times 8}{3} = \frac{32}{3} \qquad h=\sqrt{\frac{32}{3}}$$

---

۱۴) الف) نقطه C

نمودار مشتق در نقطه C صفر شده است. و مقدار مشتق قبل از نقطه C منفی و بعد از مثبت شده است یعنی

x	C
y'	− 0 +
	↘ ↗

min نسبی

ب) نقطه b

x	b
y'	+ 0 −
y	↗ ↘

max نسبی

ج) نقاط a , b , c , d , e , g

(۱۷

$(۱,-۱)$
عطف

$y = ax^{۳} + bx^{۲} + ۱$

$-۱ = a + b + ۱ \rightarrow \boxed{a + b = -۲}$

$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx \rightarrow \cancel{۳a + ۲b} = ۰$

$y'' = ۶ax + ۲b = ۰ \rightarrow ۶a + ۲b = ۰ \quad \boxed{b = -۳a}$

$a - ۳a = -۲$

$\boxed{a = ۱}$

$\boxed{b = -۳}$

(۱۸

$y = \dfrac{x}{x-۴}$ $\quad \boxed{x = ۰}$ رأس

$y = ۰$

$x - ۴ = ۰ \quad x = ۴$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-۴} = ۱ \rightarrow y = ۱$ مجانب افقی

$y' = \dfrac{(x-۴) - x}{(x-۴)^{۲}} = \dfrac{-۴}{(x-۴)^{۲}} \rightarrow x = ۴$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x \to ۴^{+}} \dfrac{x}{x-۴} = \dfrac{۱}{۰^{+}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to ۴^{-}} \dfrac{x}{x-۴} = \dfrac{۱}{۰^{-}} = -\infty$

$y'' = \dfrac{+۴(۲)(x-۴)}{(x-۴)^{۴}} = \dfrac{۸}{(x-۴)^{۳}}$

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y''		$-$		$+$	
y	۱	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$	۱
		$\cap$		$\cup$