

حسابان ۲ (پایه دوازدهم رشته ریاضی)

- ۱ الف) درست
- ب) نادرست
- ج) درست
- د) نادرست
- ۲ الف) $\{-1, 1\}$
- ب) یک

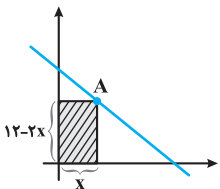
$$\min(f) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \max(f) = \frac{29}{12}$$

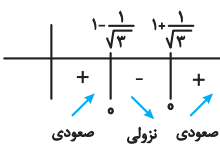
$$y = 12 - 2x$$

$$s(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2$$

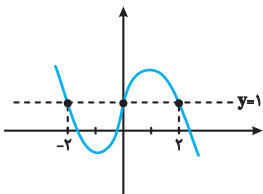
$$s'(x) = 12 - 4x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 12 - 6 = 6 \Rightarrow A(3, 6)$$



$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 = c \Rightarrow f(c) = 2$$



$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2-x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1})} = \frac{x^2-x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\text{مجانِب های قائم } 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

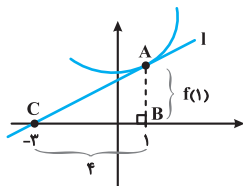
* توجه داشته باشید که خط $X = 1$ مجانب قائم نیست زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$\Rightarrow A(1, 1), C(-2, 0)$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1-0}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + (4-2a)x - 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2ax + 1$$

$$= 2 - 2a = 2 - 2a \Rightarrow T$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2a & x \geq 1 \\ -2x + 4 - 2a & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 - 2a = 2 - 2a \Rightarrow T$$

پس f در $x = 1$ همواره مشتق پذیر است.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}}$$

$$\frac{(2x-3)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-3x+1)}{(x^2-3x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\text{ب) } g(x) = x^2 \sin^2(2x+1)$$

$$g'(x) = 2x \sin^2(2x+1) + x^2 \times 2 \sin(2x+1) \cos(2x+1)$$

$$f'(x) = 4 \cos 4x$$

$$f''(x) = -16 \sin 4x \Rightarrow f'(x)f''(x) = -64 \sin 4x \cos 4x$$

$$= -32 \sin 8x$$

$$\Rightarrow -32 \sin\left(8 \times \frac{\pi}{8}\right) = -32 \times \frac{1}{2} = -16$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f'(t) = \frac{1}{3} t^{-2/3} = \frac{1}{3} t^{-2/3} \Rightarrow 2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 & * \\ t=1 & \checkmark \end{cases}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} + 1 = \frac{243 - 216 + 12}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f(2) = 4 - \frac{16}{3} + 1 = \frac{12 - 16 + 3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$2 + \tan^2 2x = 2(1 + \tan^2 2x)$$

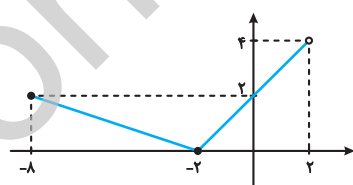
$$\Rightarrow \tan^2 2x - 2 \tan^2 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan^2 2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$P(x) = -4x^2 + 2ax + b$$

$$P(a) = 0 \Rightarrow -4a^2 + 2a^2 + b = 0 \Rightarrow b = 2a^2$$

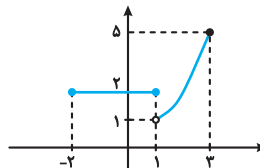
$$P(1) = 0 \Rightarrow -4 + 2a + 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=3 \\ a=-2 \Rightarrow b=8 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

با رسم نمودار واضح است که f روی دامنه خود یعنی $[-2, 2]$ غیر یکنواست. پس:

$$\max(b-a) = 3 - (-2) = 5$$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) = -\infty$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x^2]}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(1-x)^2}$$

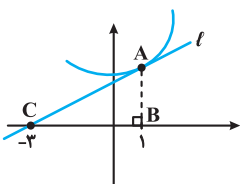
$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(1-x)^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 + (2-x)^2}{x^2 + (x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x^2 + 2x - 1 + 4 - 4x + 6x^2 - x^2}{x^2 + x^2 + 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 9x + 7}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{3}{2}$$

محمد گودرزی



۱۱۰ مانند شکل، خط l بر نمودار تابع f در نقطه A مماس است به طوری که $x_A = 1$ و مساحت مثلث ABC برابر ۲ می‌باشد. مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

۱۱۱ مشتق پذیری تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 1 & x \geq 1 \\ -x^2 + (4-2a)x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در

نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۱۱۲ مشتق توابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}}$

ب) $g(x) = x^2 \sin^2(2x + 1)$

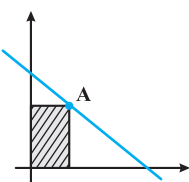
۱۱۳ اگر $f(x) = \sin^4 x$ حاصل عبارت $f'(x)f''(x)$ بازای $x = \frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

۱۱۴ تابع f در $x = 1$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$ ، یک ضابطه دلخواه برای تابع f بنویسید.

۱۱۵ معادله حرکت متحرکی بر حسب زمان (t) به صورت $f(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 1$ است.

در چه لحظه‌ای این متحرک متوقف می‌شود؟ ($t > 0$)

۱۱۶ اکستریم‌های مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ را در بازه $[0, 3]$ به دست آورید.



۱۱۷ نقطه A در ناحیه اول دستگاه محورهای مختصات روی خط $2x + y = 12$ قرار دارد. از این نقطه بر هر دو محور عمود رسم می‌کنیم تا یک مستطیل ایجاد شود. مختصات نقطه A را طوری به دست آورید که مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن شود.

۱۱۸ تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2c$ مفروض است:

الف) تعیین کنید تابع f روی چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

ب) اگر $x = c$ نقطه عطف تابع f باشد مقدار $f(c)$ را به دست آورید.

۱۱۹ تابع f با ضابطه $y = f(x)$ دارای هر سه ویژگی زیر است:

الف) $f(-2) = f(0) = f(2) = 1$

ب) روی بازه $(-\infty, 0)$ همواره $f''(x) > 0$

ج) روی بازه $(0, +\infty)$ همواره $f''(x) < 0$

نموداری برای تابع f رسم کنید.

۱۱ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر دامنه تابع $2f(-x+1)$ برابر $[-2, 1]$ باشد، دامنه تابع $f(2x-1)+1$ برابر $(\frac{1}{2}, 2]$ برابر است.

ب) تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{[x]}$ روی بازه $[1, 3]$ یکنوا نیست.

ج) دوره تناوب تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{5})$ برابر ۸ است.

د) اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نباشد، پیوسته هم نیست.

۱۲ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

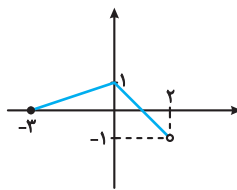
الف) مجموعه نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ برابر است با

ب) بیش‌ترین مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ برابر است با

۱۳ معادله مثلثاتی $3 + \tan^4 2x = \frac{2}{\cos^2 2x}$ را حل کنید.

۱۴ نمودار تابع $f(2x-1)+1$ مانند شکل

زیر است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = -2f(x+1)$ را رسم کنید.

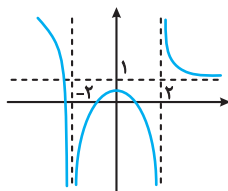


۱۵ چندجمله‌ای $4x^2 + 2ax + b - 4x^2 + 2ax + b$ بر $x-1$ و $x-a$ بخش پذیر است. اگر $ab < 0$ مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & 1 < x \leq 3 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ روی بازه $[a, b]$

غیریکنوا است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ چقدر است؟

۱۷ نمودار تابع f با ضابطه $y = f(x)$ مانند شکل زیر است. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) =$

د) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

۱۸ حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x^2]}{(1-x)^2} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 + (2-x)^2}{x^2 + (x+1)^2} =$

۱۹ مجانب‌های تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{2x^3 - 2x^2 - x + 1}$ را به دست آورید.