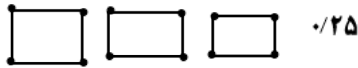


پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته: ریاضی-فیزیک	
تعداد صفحه: ۲		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان: ۱۳/۰۲/۱۴۰۲	
ردیف		سئوالات	
نمره		ساعت شروع:	
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند $x$ و $y$ وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. ج) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. د) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b)   m$ .	۱	
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) $a$ و $b$ اعدادی صحیح و $a$ مخالف صفر است. اگر $a   b$ آن‌گاه عدد ..... شمارنده عدد ..... است. ب) $m$ عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با ..... است. ج) $[a, b] = c$ - اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) ..... ۲) $\forall m > 0, \dots$	۱	
۳	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2 + 1 \geq b(2 - b)$	۱	
۴	اگر $a$ عددی صحیح و فرد باشد و $b   a + 2$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 12)$ بر ۸ را بیابید.	۱	
۵	به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟	۱	
۶	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف) مرتبه گراف نشان‌دهنده تعداد ..... گراف می‌باشد. ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم. ج) دو یال را ..... می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند. د) گراف $G$ را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.	۱	
۷	گراف $G$ که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) بزرگ‌ترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟ ب) دوری به طول ۵ برای رأس $a$ بنویسید. ج) این گراف چند یال نیاز دارد تا گراف کامل شود.	۱	
۸	عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید	۱/۵	

۲	<p>الف) یک گراف ۶ رأسی که چند ۷- مجموعه با اندازه یک داشته باشد رسم کنید.</p> <p>ب) یک گراف ۶ رأسی که فقط یک ۷- مجموعه با اندازه دو داشته باشد رسم کنید.</p> <p>ج) دوگراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که در یکی عدد احاطه‌گری آن کم‌ترین و در دیگری بیشترین مقدار ممکن باشد.</p>	۹
۱/۵	<p>الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیر مینمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینمال تبدیل کرد؟</p> <p>ب) با رسم <math>P_6</math> یک مجموعه احاطه‌گر مینمال غیر می‌نیمم بنویسید .</p>	۱۰
۱	<p>در هر مورد عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید ..</p> <p>الف) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ( ۲۵ - ۱۵ ) است.</p> <p>ب) تعداد مربع لاتین <math>3 \times 3</math> ( ۱۲ - ۹ ) می‌باشد .</p> <p>ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ( ۱۲ - ۶ ) است.</p> <p>د) تعداد عدد شش رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ برابر ( ۷۲۰ - ۶۰ ) می‌باشد.</p>	۱۱
۱/۵	<p>به چند طریق می‌توان از ۵ نوع گل ۱۰ شاخه انتخاب کرد به طوری که از انواع اول فقط یک گل و از نوع دوم بیشتر از ۲ گل انتخاب کرد؟</p>	۱۲
۱	<p>اگر داشته باشیم <math>A = \{1, 2, 3, 4\}</math> و <math>B = \{5, 6, 7, 8, 9\}</math>، در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم (متمايز) از <math>A</math> و سه رقم (متمايز) از <math>B</math> باشد؟</p>	۱۳
۱/۵	<p>قرار است سه کارگر <math>W_1, W_2, W_3</math> در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید</p>	۱۴
۱/۵	<p>مجموعه‌ی اعداد <math>A = \{1, 2, \dots, 84\}</math> را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۴ عضوی از <math>A</math> دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۶ باشد.</p>	۱۵
۱/۵	<p>مطلوب است تعداد اعداد سه رقمی که در هریک از آنها هر کدام از ارقام ۲ و ۹ حداقل یک‌بار ظاهر شده باشند.</p>	۱۶
۲۰	<p>تلاش جادویی است که موفقیت را می‌سازد.</p>	

پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه		رشته: ریاضی - فیزیک		تعداد صفحه:	مدت امتحان:												
سئوالات امتحان شبه نهایی درس: ریاضیات گسسته			تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۲/۱۳														
نام و نام خانوادگی:			ساعت شروع:														
ردیف	بارم																
راهنمای تصحیح																	
۱	الف) درست	ب) نادرست	ج) نادرست	د) نادرست	هر مورد ۰/۲۵												
۲	الف) عدد $a$ شمارنده عدد $b$	ب) $ m $	ج) $a c, b c$	د) $a m, b m \Rightarrow c \leq m$	هر مورد ۰/۲۵												
۳	$a^2 + 1 \geq b(2 - b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2b + b^2 \geq 0 \quad \cdot/۲۵$ $\Leftrightarrow a^2 + (1 - b)^2 \geq 0 \quad \cdot/۲۵$				درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت پذیر می باشند در نتیجه حکم برقرار است. ۰/۲۵												
۴	$x = \text{فرد} \Rightarrow x^2 = 8q + 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 12 = (8q + 1) + (8q' + 1) + 12 = 8(q + q') + 14 \Rightarrow r = 6 \quad \cdot/۲۵ \\ a, b = \text{فرد} \quad \cdot/۲۵ \end{cases}$				تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی را $x$ و تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی را $y$ در نظر می گیریم. بنابراین:												
۵	$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \quad \cdot/۲۵$ $5y = 29 \Rightarrow 5y = 29 - 12 \times 2 = 5 \xrightarrow{\div 5} y = 1 \Rightarrow y = 2k + 1 \xrightarrow{2x + 5y = 29}$ $2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow x = -5k + 12 \quad \cdot/۲۵$ <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>k</math></td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی: <math>y = 2k + 1</math></td> <td>۱</td> <td>۳</td> <td>۵</td> </tr> <tr> <td>تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی: <math>x = -5k + 12</math></td> <td>۱۲</td> <td>۷</td> <td>۲</td> </tr> </table>				$k$	۰	۱	۲	تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی: $y = 2k + 1$	۱	۳	۵	تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی: $x = -5k + 12$	۱۲	۷	۲	به ۳ طریق می توان خرد کرد ۰/۲۵
$k$	۰	۱	۲														
تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی: $y = 2k + 1$	۱	۳	۵														
تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی: $x = -5k + 12$	۱۲	۷	۲														
۶	الف) رئوس	ب) طوقه	ج) مجاور	د) همبند	هر مورد ۰/۲۵												
۷	الف) رأس $f$ و ۵ (پ) $abecda$ ۰/۲۵ ج) درگراف کامل مرتبه ۶ تعداد یال ها $(6 \times 5)/2 = 15$ ۰/۲۵ تعداد یال های این گراف ۶ پس $15 - 6 = 9$ یال نیاز دارد. ۰/۲۵																
۸	طبق قضیه داریم $\left\lfloor \frac{10}{4+1} \right\rfloor = 2 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$ . ۰/۵																
۹	الف) مجموعه احاطه گری آن هر راس می تواند باشد. شش مجموعه احاطه گر می نیمم دارد. ۰/۲۵ ب) در گراف مقابل مجموعه احاطه گری $\{a, b\}$ است. ۰/۲۵ ج) در گراف $C_{12}$ عدد احاطه گری ۴ که کمترین است یا ۴ تا مثلث یا هر گراف دیگر با این ویژگی که عدد ۰/۲۵																

احاطه گری آن ۴ باشد کمترین و در شکل زیر یا مشابه های آن عدد احاطه گری ۶ که بیشترین است



عدد احاطه گری  $2 + 2 + 2 = 6$   $\cdot/25$

۱/۵

الف) اگر  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  یک مجموعه احاطه گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه گر مینمال باقی می ماند.  $\cdot/25$  بنا بر این عضوی مانند  $a_1$  را در نظر میگیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر بماند آن را حذف می کنیم  $\cdot/25$  در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم.  $\cdot/25$

$A = \{1, 3, 5\}$  یا  $B = \{2, 4, 6\}$   $\cdot/25$

ب)  $\cdot/5$

۱

الف)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  (ب) ۱۲ (ج) ۶ (د) ۶۰ هر مورد  $\cdot/25$

۱/۵

تعداد هر شاخه  $x_i$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 > 2 \end{matrix} \xrightarrow{\cdot/25} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \quad \cdot/5$$

جواب حسابی  $\xrightarrow{\cdot/25} \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84 \cdot/25$

۱۲

۱

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200 \quad \cdot/25$$

$\cdot/25 \quad \cdot/25 \quad \cdot/25$

۱۳

برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده الیاف است. (سوال ۱۴ ص ۷۲)

$W_1 \quad W_2 \quad W_3$

روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

$= A \quad \cdot/5$

$W_1 \quad W_2 \quad W_3$

روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$= B \quad \cdot/5$

$W_1 \quad W_2 \quad W_3$

روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

$\cdot/5$

عدد سمت چپ هر در آیه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.

۱/۵

اعداد مجموعه ی A در ۴۱ قفس به شکل زیر افراز می کنیم:  $\cdot/5$

$$\{2, 84\}, \{3, 83\}, \{4, 82\}, \dots, \{42, 44\}$$

۱۵

۰/۵ یک مجموعه ۴۴ عضوی  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \{ \square, ۱, ۴۳, ۴۲, \dots, ۳, ۲ \}$

دو عضو ۱ و ۴۳ زوجی ندارند که مجموع ۸۶ را سازد با ۴۱ عضو اول زوج مرتب ها و حداقل یک عضو از اعداد ۴۴ تا ۸۶ در کل یک مجموعه با حداقل ۴۴ عضو ۰/۵  
طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیرمجموعه وجود دارند که مجموع آن ها ۸۶ است.

حالت مطلوب، اعداد ۳ رقمی ای هستند که فاقد ۲ یا فاقد ۹ نباشند. ارقامی که می توانیم استفاده کنیم از صفر تا ۹ هستند یعنی ۱۰ تا.

۱/۵

A: ۲ فاقد  $\rightarrow |A| = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$  ۰/۲۵

B: ۹ فاقد  $\rightarrow |B| = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$  ۰/۲۵

$A \cap B$ : ۹ و ۲ فاقد  $\rightarrow |A \cap B| = ۷ \times ۸ \times ۸ = ۴۴۸$  ۰/۲۵

حالا چون کل سه رقمی ها ۹۰۰ تا هستند:  $(۹ \times ۱۰ \times ۱۰)$  پس طبق اصل شمول و عدم شمول خواهیم داشت:

$|\overline{A \cap B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸) = ۵۲$  ۰/۵

. همکار محترم لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم بفرمایید

۱۶