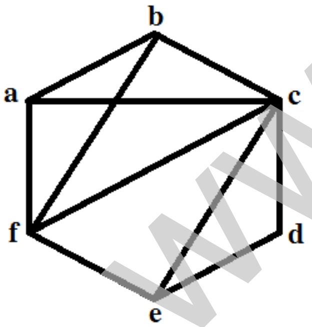
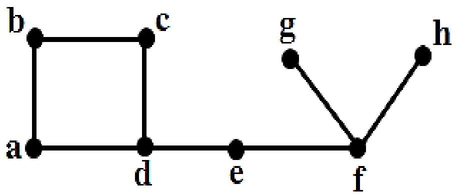
بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	تاریخ امتحان: **۱۶ / ۱۴۰۲/۰۲**		
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع :		

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $a^۳ < b^۳ \Leftrightarrow a < b$. ب) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $c \neq ۰$ آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$. ج) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است. د) در هر گراف، هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.	۱
۲	جمله‌های زیر را با عدد، کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ داری جواب باشد آن است که، .... ب) گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک .... وجود داشته‌باشد. ج) عدد احاطه‌گری گراف P_n برابر .... است. د) اگر $d > ۱$ و $(a, a+۳) = d$ در این صورت d برابر است با	۱
۳	به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱
۴	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۲۷ به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲a - ۳b)$ بر ۲۷ را به‌دست- آورید.	۱/۵
۵	اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $۳ \| n^۳ - n$.	۱/۷۵
۶	باقی‌ماندهٔ تقسیم $A = ۴۹^{۱۰۱} + ۸۱$ را بر ۱۶ بیابید.	۱
۷	معادلهٔ همنهشتی $۷x \overset{۴}{\equiv} ۵$ را حل کنید.	۰/۷۵
۸	نمودار گراف G به صورت مقابل است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) یک مسیر به طول ۴ از a به b بنویسید. ج) درجهٔ رأس e را در گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید د) یک دور به طول ۵ در G بنویسید.  	۱/۲۵
۹	عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائهٔ راه‌حل، مشخص کنید.  	۱
۱۰	الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱
۱۱	فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq ۴$. نشان‌دهید G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.	۱/۲۵

ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ دوم

www-kanoon-ir

بسمه تعالی

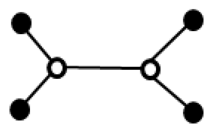
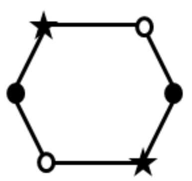
پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	تاریخ امتحان: **۱۶ / ۱۴۰۲/۰۲**		
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع :		

۱۲	معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱$ چه تعداد جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_i \geq ۱$, $۱ \leq i \leq ۵$.	۱
۱۳	به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به سه گروه متفاوت با تعداد اعضای ۳، ۴ و ۵ نفر تقسیم نمود.	۰/۵
۱۴	۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، اگر بخواهیم: الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۵	الف) دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ بنویسید. ب) یک مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ ۴×۴ بنویسید.	۱/۵
۱۶	در یک مدرسهٔ ۱۰۰ نفره، ۵۵ نفر فوتبال و ۶۵ نفر والیبال بازی می‌کنند. اگر ۵ نفر در هیچ رشتهٔ ورزشی نباشند. چند نفر فقط در یک رشته به فعالیت می‌پردازند؟	۱/۵
۱۷	اعداد $A = \{۱, ۲, ... , ۸۴\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیر مجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموع‌شان برابر با ۸۵ است.	۱/۵
	تلاش جادویی است که موفقیت را می سازد.	۲۰

www-kanoon-ir

بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	تاریخ امتحان: **۱۶ / ۱۴۰۲/۰۲**		
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع :		

ردیف	**راهنمای تصحیح**	نمره
۱	الف) درست $\boxed{۰/۲۵}$ ب) نادرست $\boxed{۰/۲۵}$ ج) درست $\boxed{۰/۲۵}$ د) نادرست $\boxed{۰/۲۵}$	۱
۲	الف) $(a,b)\|c$ $\boxed{۰/۲۵}$ ب) مسیر $\boxed{۰/۲۵}$ ج) $\left[\frac{n}{۳}\right]$ $\boxed{۰/۲۵}$ د) $d=۳$ $\boxed{۰/۲۵}$	۱
۳	$\frac{a+b}{۲} \ge \sqrt{ab}$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Leftrightarrow a+b \ge ۲\sqrt{ab}$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \ge ۰$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^۲$ ≥ ۰ $\boxed{۰/۲۵}$ گزاره همیشه درست	۱
۴	$\begin{cases} a=۲۷q_۱+۱۲ \Rightarrow ۲a=۵۴q_۱+۲۴ & \boxed{۰/۲۵} \\ b=۲۷q_۲+۱۳ \Rightarrow -۳b=-۸۱q_۲-۳۹ & \boxed{۰/۲۵} \end{cases} \Rightarrow ۲a-۳b=۵۴q_۱+۲۴-۸۱q_۲-۳۹$ $=۲۷(۲q_۱-۳q_۲)-۱۵$ $\boxed{۰/۵}$ $=۲۷q_۳-۲۷+۱۲$ $\boxed{۰/۲۵}$ $=۲۷(q_۳-۱)+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$ $\boxed{۰/۲۵}$	۱/۵
۵	توجه می‌کنیم که $n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n+۱)(n-۱)$ (⁎) $\boxed{۰/۵}$ n به یکی از سه شکل $۳k$، $۳k+۱$ و $۳k+۲$ است. $\boxed{۰/۲۵}$ اگر $n=۳k$، آن‌گاه با توجه به (⁎)، $n^۳-n$ مضرب ۳ است. $\boxed{۰/۲۵}$ اگر $n=۳k+۱$، آن‌گاه $n-۱=۳k$ و در نتیجه با توجه به (⁎)، $n^۳-n$ مضرب ۳ است. $\boxed{۰/۲۵}$ اگر $n=۳k+۲$، آن‌گاه $n+۱=۳k+۳=۳(k+۱)=۳k'$ و در نتیجه با توجه به (⁎)، $n^۳-n$ مضرب ۳ است. $\boxed{۰/۵}$	۱/۷۵
۶	$۴۹ \overset{۱۶}{\equiv} ۱$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Rightarrow ۴۹^{۱۰۱} \overset{۱۶}{\equiv} ۱^{۱۰۱}=۱$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Rightarrow ۴۹^{۱۰۱}+۸۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۸۲ \overset{۱۶}{\equiv} ۲$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Rightarrow A \overset{۱۶}{\equiv} ۲$ $\boxed{۰/۲۵}$	۱
۷	$۷x \overset{۴}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۵+۱۶=۲۱$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} ۳$ $\boxed{۰/۲۵}$ $\Rightarrow x=۴k+۳$ $\boxed{۰/۲۵}$	۰/۷۵
۸	الف) $\Delta(G)=۵$ $\boxed{۰/۲۵}$, $\delta(G)=۲$ $\boxed{۰/۲۵}$ ب) $afecb$ $\boxed{۰/۲۵}$ ج) $d_{\bar{G}}(e)=۲$ $\boxed{۰/۲۵}$ د) $abcefa$ $\boxed{۰/۲۵}$	۱/۲۵
۹	برای احاطه کردن رأس h، یکی از رئوس h یا f باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. $\boxed{۰/۲۵}$ برای احاطه کردن رئوس a,b,c,d حداقل ۲ رأس غیر از h یا f مورد نیاز است. $\boxed{۰/۲۵}$ بنابراین $\gamma(G) \ge ۳$. $\boxed{۰/۲۵}$ چون $\{f,d,b\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است، پس $\gamma(G)=۳$. $\boxed{۰/۲۵}$	۱
۱۰	الف) مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با دایرهٔ توخالی مشخص شده است. $\boxed{۰/۵}$  ب) رأس‌های هم‌شکل، یک مجموعهٔ احاطه‌گر را نشان‌می‌دهند. $\boxed{۰/۵}$ 	۱

www-kanoon-ir

بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۲/ ۱۶**		
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع :		

ردیف	پاسخ	بارم
۱۱	فرض کنیم a یک رأس دلخواه در G باشد. به طور حتم a به رأس دیگری مثل b متصل است، چون $\delta(G) \geq ۴$. $\boxed{۰/۲۵}$ چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم b به رأس دیگری غیر از a، مثل c متصل است. $\boxed{۰/۲۵}$ چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم c به رأس دیگری غیر از a و b، مثل d متصل است. $\boxed{۰/۲۵}$ چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم d به رأس دیگری غیر از a و b و c، مثل e متصل است. $\boxed{۰/۲۵}$ بنابراین $abcde$ یک مسیر با طول ۴ در گراف G است. $\boxed{۰/۲۵}$	۱/۲۵
۱۲	$x_i \geq ۱ \Rightarrow y_i := x_i - ۱ \geq ۰\ \boxed{۰/۲۵} \Rightarrow x_i = y_i + ۱ \Rightarrow (y_۱ + ۱) + \cdots + (y_۵ + ۱) = ۱۱$ $\Rightarrow y_۱ + \cdots + y_۵ = ۶\ \boxed{۰/۲۵} \xRightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}\ \boxed{۰/۲۵}} \text{تعداد جواب‌های معادله} = \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}$ $= \binom{۱۰}{۴}\ \boxed{۰/۲۵}$	۱
۱۳	$\frac{۱۲}{۳! \times ۴! \times ۵!}\ \boxed{۰/۵}$	۰/۵
۱۴	الف) $۲! \times ۵! \times ۴!\ \boxed{۰/۵}$ ب) $\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱} \Longrightarrow \text{تعداد حالات} = ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۵! \times ۴!\ \boxed{۰/۵}$ ج) $۲! \times ۸!\ \boxed{۰/۵}$	۱/۵
۱۵	الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}\ \boxed{۰/۵} \Longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ \\ ۲۳ & ۳۱ & ۱۲ \\ ۳۲ & ۱۳ & ۲۱ \end{pmatrix}\ \boxed{۰/۵}$ ب) $\boxed{۰/۵}$ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$	۱/۵
۱۶	فرض کنیم S مجموعهٔ دانش آموزان مدرسه، F دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند و V دانش‌آموزانی که والیبال بازی می‌کنند. بنابراین $\lvert\overline{F} \cap \overline{V}\rvert = ۵$, $\lvert V\rvert = ۶۵$, $\lvert F\rvert = ۵۵$, $\lvert S\rvert = ۱۰۰$. $\boxed{۰/۲۵}$ $\lvert F \cup V\rvert = \lvert S\rvert - \lvert\overline{F} \cap \overline{V}\rvert = ۱۰۰ - ۵ = ۹۵\ \boxed{۰/۲۵}$ $\lvert F \cap V\rvert = \lvert F\rvert + \lvert V\rvert - \lvert F \cup V\rvert = ۵۵ + ۶۵ - ۹۵ = ۲۵\ \boxed{۰/۲۵}$ تعداد افرادی فقط فوتبال بازی می‌کنند $= \lvert F\rvert - \lvert F \cap V\rvert = ۵۵ - ۲۵ = ۳۰$ $\boxed{۰/۲۵}$ تعداد افرادی فقط والیبال بازی می‌کنند $= \lvert V\rvert - \lvert F \cap V\rvert = ۶۵ - ۲۵ = ۴۰$ $\boxed{۰/۲۵}$ تعداد افرادی فقط در یک رشته بازی می‌کنند $= ۴۰ + ۳۰ = ۷۰$ $\boxed{۰/۲۵}$	۱/۵
۱۷	فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A باشد. $\boxed{۰/۲۵}$ می‌خواهیم این ۴۳ عضو را در ۴۲ مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... ، $A_{۴۲}$ بگنجانیم مشروط بر این که $A_i \subseteq \{i, ۸۵ - i\}$. $\boxed{۰/۷۵}$ اگر عناصر مجموعهٔ A را کبوترها و A_iها را لانه‌ها فرض کنیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، بنابر اصل لانه کبوتری حداقل یکی از A_iها حداکثر تعداد اعضای خود را خواهدداشت و این یعنی حداقل دو عضو مجموعهٔ S، مجموع‌شان برابر ۸۵ است. $\boxed{۰/۵}$	۱/۵