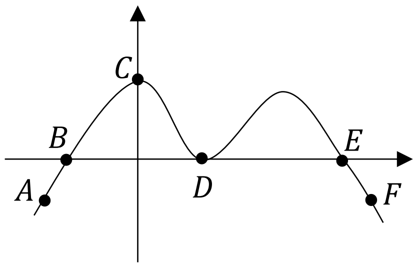
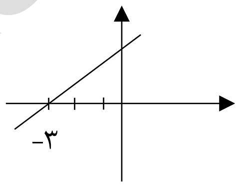
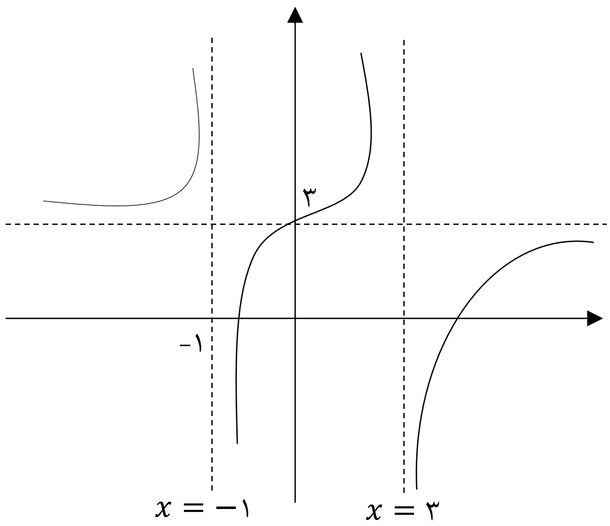
باسمه تعالی

سؤالات آزمون شبه نهایی درس : حسابان۲	**رشته : ریاضی وفیزیک**	**ساعت شروع : ۸ صبح**	**مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی :		**تاریخ: ۲/۱۱ /۰ ۱۴۰۲**	**تعداد صفحه: ۳ صفحه**
دانش آموزان پایه دوازدهم در اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲		**اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین**	

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) عبارت $x^۵ - ۳۲$ بر $x + ۲$ بخشپذیر است. درست☐ نادرست☐ ب) نمودار $y = \frac{۳}{۲} f(\frac{۱}{\sqrt{۲}} x)$ از انبساط افقی و انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. درست☐ نادرست☐ ج) هر نقطه دامنه که مشتق در آن صفر است اکسترمم نسبی است. درست☐ نادرست☐ د) هر تابع پیوسته در بازه $[a , b]$ حتماً اکسترمم نسبی دارد. درست☐ نادرست☐	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) بُرد تابع $f(x) = ۳sin۲x - ۱$ برابر بازه .... است. ب) نقطه .... روی منحنی روبرو نقطه‌ای است که مقدار تابع در آن صفر است ولی مقدار مشتق تابع در آن مثبت است.  ج) مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{۳x-\sqrt{x}}{\|۴x-۱\|}$ برابر .... است. د) اگر نمودار مشتق اول تابع $f(x)$ بصورت  باشد آنگاه $x = -۳$ در تابع اولیه طول نقطه .... خواهد بود. (ماکزیمم نسبی ـ می‌نیمم نسبی ـ عطف)	۲
۳	الف) فرض کنید f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشد اگر $f(a) \le f(b)$ نشان دهید $a \ge b$ ب) اگر $log_{۰/۱}(x + ۲) \le log_{۰/۱}(۲x - ۴)$ حدود x را بیابید.	۲
۴	حاصل حدهای روبرو را بیابید. الف) $\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[-x] - ۳}{\|۲x - ۱\|} =$ ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲ - ۱} + ۳}{۵x - ۱} =$	۱

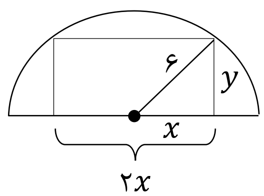
ادامه سوالات صفحه دوم

سؤالات آزمون شبه نهایی درس : حسابان۲	رشته : ریاضی وفیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :		تاریخ: ۱۴۰۲/ ۰۲/۱۱	تعداد صفحه: ۳ صفحه
دانش آموزان پایه دوازدهم در **اردیبهشت ماه** سال ۱۴۰۲		اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین	

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد	نمره
۵	با توجه به نمودار حاصل حدهای زیر را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)] =$ ج) $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x-۱) =$ 	۰/۷۵
۶	نمودار تابعی را در دستگاه مختصات رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند الف) خط $x=۲$ مجانب قائم آن باشد. ب) نقطه $A\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ نقطه ماکزیمم نسبی مشتق‌پذیر آن باشد. ج) نقطه $\begin{bmatrix}۴\\-۲\end{bmatrix}$ نقطه می‌نیمم نسبی مشتق‌ناپذیر آن باشد.	۰/۷۵
۷	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری $f(x)=\lvert x^۲+۲x\rvert$ را در $x=-۲$ بررسی کنید و نوع نقطه را مشخص کنید.	۱/۵
۸	معادله مثلثاتی روبرو را حل کنید و جواب‌های کلی آنرا مشخص کنید. $cos۲x+sinx-۱=۰$	۱/۵
۹	مشتق تابع $f(x)=(۱-۲x).\sqrt{cosx}$ را در $x=۰$ بیابید.	۱
۱۰	تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲ & x<۱\\ x-۲ & ۱\le x<۳\\ ۴ & x\ge ۳\end{cases}$ مفروض است. الف) نمودار تابع f را در دستگاه مختصات رسم کنید. ب) مختصات نقاط مشتق‌ناپذیر را به کمک نمودار بیابید. ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.	۲/۲۵

ادامه سوالات صفحه سوم

سؤالات آزمون شبه نهایی درس : حسابان۲	**رشته : ریاضی وفیزیک**	**ساعت شروع : ۸ صبح**	**مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی :		**تاریخ: ۱۴۰۲/ ۰۲/۱۱**	**تعداد صفحه: ۳ صفحه**
دانش آموزان پایه دوازدهم در اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲		**اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین**	

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد	نمره
۱۱	آهنگ تغییر متوسط $f(x)=۲x-x^{۲}$ در بازه $[۰ , b]$ برابر آهنگ لحظه‌ای در $x=۲$ است. مقدار b را بیابید.	۱/۵
۱۲	نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع روبرو را به کمک رسم نمودار بیابید. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & ۱\le x<۵\\ ۴-x & ۵\le x\le ۱۰\end{cases}$	۲
۱۳	مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه $(۱, ۲)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^{۳}-۶x+b$ باشد.	۱/۲۵
۱۴	بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی نیم‌دایره باشد، را بیابید. 	۱/۵
	جمع نمرات «موفق و پیروز باشید»	**۲۰**

پاسخ امتحان شبه نهایی حسابان ۲ - استان قزوین - ۱۴۰۲/۲/۱۱

امیر قلی‌پور - رتبه ۵۹ کنکور ریاضی ۹۴

---

۱) الف) نادرست　　ب) درست　　ج) نادرست　　د) نادرست

---

۲) الف) $[-4,2]$　　ب) B　　ج) $y=\frac{3}{4}$　　د) مینیمم نسبی

---

۳) الف) فرض خلف: فرض می‌کنیم $a<b$ باشد:

$$a<b \xrightarrow[\text{است}]{\text{تابع اکیداً نزولی}} f(a)>f(b)$$

چون طبق فرض سوال داریم $f(a)\leqslant f(b)$ پس فرض خلف باطل بوده، و حکم $(b \leqslant a)$ ثابت می‌شود.

ب) تابع $\log_a x$ $(0<a<1)$ یک تابع اکیداً نزولی است پس داریم:

$$\log_{0.1}(x+2)\leqslant \log_{0.1}(2x-4) \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{اکیداً}} x+2\geqslant 2x-4 \Rightarrow 6\geqslant x$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,6] \quad \text{I}$$

از طرفی دامنه لگاریتم $(0,+\infty)$ است پس داریم:

$$x+2>0 \Rightarrow x>-2 \quad \text{II}$$

$$2x-4>0 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \quad \text{III}$$

$$\text{I},\ \text{II},\ \text{III} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x\in(2,6]}$$

---

۴) الف) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{[-x]-3}{|2x-1|} = \frac{[-\frac{1}{2}]-3}{|2\times\frac{1}{2}-1|} = \frac{-1-3}{|0|} = \frac{-4}{|0|} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

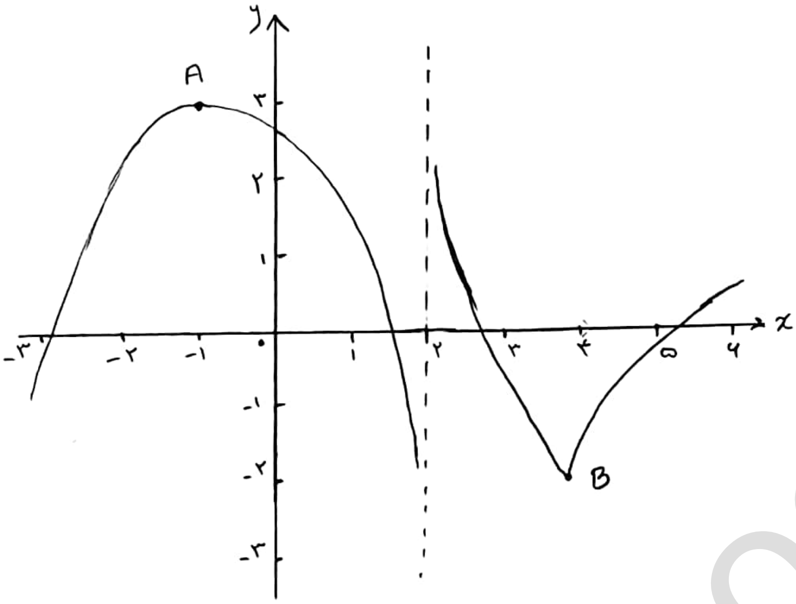
ب) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3}{5x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{5x} = \frac{|2x|}{5x} = \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}$$

۵) الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)] = [3^-] = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x-1) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

---

۶)



---

۷) $f(x) = |x^2 + 2x|$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ابتدا تابع داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$P(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$

x		-2		0	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow f'_+(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{-P(-2+h) - 0}{h} = \frac{-\left((-2+h)^2 + 2(-2+h)\right)}{h}$$

$$= \frac{-(h^2 - 4h + 4 - 4 + 2h)}{h} = \frac{2h - h^2}{h} = 2 - h = \boxed{2}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{P(-2+h) - 0}{h} = \frac{(-2+h)^2 + 2(-2+h)}{h} = \frac{4 - 4h + h^2 - 4 + 2h}{h}$$

$$= \frac{h^2 - 2h}{h} = h - 2 = \boxed{-2}$$

چون مشتق راست و چپ برابر نیستند، تابع در نقطه $x = -2$ مشتق‌پذیر نیست، و نقطه مینیمم نسبی گوشه‌ای است.

$f'_-(-2) < 0$, $f'_+(-2) > 0 \Rightarrow$ Min نسبی

۱۸)

$\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$$

اجتماع ۳ دسته جواب بدست آمده، مطلوب مسأله است.

۱۹)

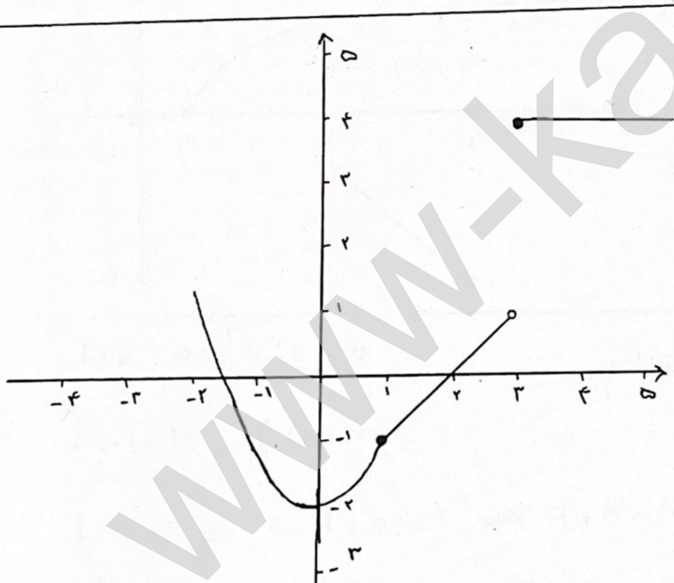
$f(x) = \underbrace{(1-2x)}_{u} \cdot \underbrace{\sqrt{\cos x}}_{v} \qquad f'(x) = u'v + uv'$

$u' = -2, \quad v' = (\sqrt{\cos x})' = \dfrac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

$\Rightarrow f'(x) = -2\sqrt{\cos x} + (1-2x)\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

$f'(0) = -2\times\sqrt{1} + (1 - 2\times 0)\dfrac{-0}{2\sqrt{1}} = -2\times 1 + 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = -2}$

۱۰) الف)



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 1 \\ x - 2 & 1 \leq x < 3 \\ 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

x	-1	0	1	3^-	3^+	5
$f(x)$	-1	-2	-1	$+1$	4	4

ب) نقاط $x=1, x=3$ مشتق ناپذیرند. زیرا تابع در $x=3$ ناپیوسته است و در $x=1$ نیز مشتق چپ و راست برابر نیستند. (شیب نمودار ها متفاوت است)

ج)

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2-2)' & x < 1 \\ (x-2)' & 1 \leq x < 3 \\ (4)' & 3 \leq x \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases}$$

(۱۱

$f(x) = 2x - x^2$

آهنگ تغییر متوسط در بازه $[0,b]$ $= \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = \dfrac{2b-b^2-0}{b} = 2-b$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ $= f'(2)$. $\quad f'(x) = 2-2x \Rightarrow f'(2) = 2-4 = -2$

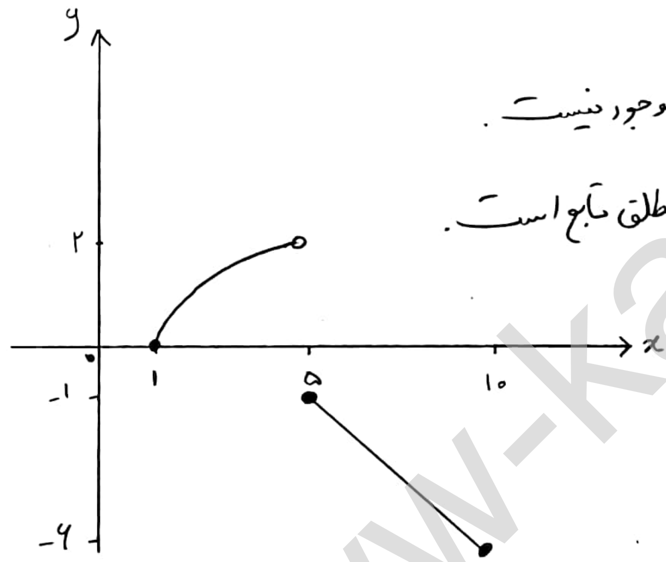
$\Rightarrow 2-b=-2 \Rightarrow \boxed{b=4}$

(۱۲

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & 1\leq x<5 \\ 4-x & 5\leq x\leq 10\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \sqrt{1-1}=0\ ,\ \sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2 \\ \Rightarrow 4-5=-1\ ,\ 4-10=-6\end{array}$$

بحرانی : $x=\{1,5,10\}$ در این نقاط مشتق موجود نیست.

تابع ماکزیمم مطلق ندارد ولی نقطه $\begin{vmatrix}10\\-6\end{vmatrix}$ مینیمم مطلق تابع است.



(۱۳ نقطه (۱،۲) اکسترمم نسبی تابع است پس داریم:

$f(x) = ax^3 - 6x + b$

$f(1)=2\ ,\ f'(1)=0$

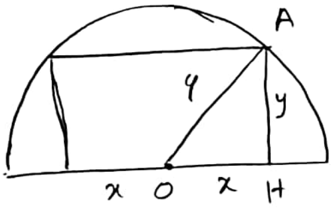
$f(1)=2 \Rightarrow a-6+b=2 \Rightarrow a+b=8$

$f'(x)=3ax^2-6 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a-6=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=6}$

$\Rightarrow f(x)=2x^3-6x+6 \Rightarrow f'(x)=6x^2-6 = 6(x-1)(x+1)$

مشتق در $x=1$ تغییر علامت می‌دهد پس اکسترمم نسبی است

۱۴)



$S =$ مساحت مستطیل $= ۲xy$

$\overset{\Delta}{AOH}: \ x^۲+y^۲=۶^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=۳۶$

$$\Rightarrow y^۲=۳۶-x^۲ \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-x^۲} \Rightarrow S=\underbrace{۲x}_{u}\underbrace{\sqrt{۳۶-x^۲}}_{v}$$

$$S'(x)=۰ \Rightarrow u'v+uv'=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۳۶-x^۲}+۲x\,\frac{-۲x}{۲\sqrt{۳۶-x^۲}} = ۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲(۳۶-x^۲)-۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}=\frac{۷۲-۴x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}=۰ \Rightarrow ۷۲=۴x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=۱۸ \Rightarrow x=۳\sqrt{۲} \ , \ y=\sqrt{۳۶-۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S=۲xy=۲\times ۳\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۲}=\boxed{۳۶}$$