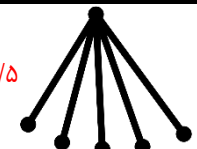
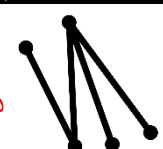



نام و نام خانوادگی:	امتحان شبه‌نهایی ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
نام مدرسه:	نوبت دوم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شهرستان:	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد.	تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۸

۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر α یک عدد گویا و β گنگ باشد، $3\alpha + \beta$ همواره گنگ است. ب) مجموعه احاطه‌گر یک گراف تهی، مینیمال است. ج) اگر n عددی صحیح باشد آنگاه $3 n^3 - n$. د) دو مربع لاتین متعامد 6×6 وجود دارد.	۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک گراف کامل، عضو دارد. ب) اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $d = (-2, a)$ آن‌گاه d برابر است. ج) یک گراف را ناهمبند گوئیم هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک وجود داشته باشد. د) تعداد حالات انتخاب ۵ شاخه گل از بین سه نوع گل طوری که از هر نوع، حداقل یک شاخه داشته باشیم برابر است.	۱
۱/۵	در سؤالات زیر گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) باقیمانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ به ترتیب ۲ و ۱۱ است، باقی‌مانده تقسیم عدد $3a - 5b$ را بر ۱۷ کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ ب) عدد احاطه‌گری گراف G از مرتبه ۱۰ و اندازه ۴۰ کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) حداقل یک است ۴) ۱ ج) معادله $21x + 35y = 2n + 1$ به ازای کدام عدد طبیعی n در \mathbb{Z} جواب دارد؟ ۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۱۳	۱/۵
۱	برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی a, b ثابت کنید: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{3ab}$	۴
۱	برای هر یک مثال نقض بیاورید. الف) اگر x گنگ باشد آنگاه $x^2 + 6x + 5$ نیز گنگ است. ب) تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف k -منتظم از مرتبه n برابر $\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ می‌باشد.	۱
۱	اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید $a+c \equiv b+c \pmod{m}$	۱
۱	معادله $3x + 5y = 121$ را در \mathbb{Z} حل کنید.	۱
۱/۵	رقم یکان $5 - 3^{1399}$ را بیابید.	۱/۵
۱/۵	در هر مورد، گرافی با مشخصات خواسته شده رسم کنید. الف) مرتبه ۶ با حداقل یال و عدد احاطه‌گری آن یک باشد. ب) همبند، بدون دور از مرتبه ۵ که در آن $\Delta = 3$ باشد. ج) ۴ رأسی که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.	۱/۵

۲	 <p>با توجه به گراف G، به سوالات زیر پاسخ دهید. (محاسبات لازم است)</p> <p>الف) $\Delta(G) =$ $\delta(G) =$ $\deg(c) =$</p> <p>ب) دوری به طول ۴ بنویسید.</p> <p>ج) حداقل چند یال دیگر به این گراف اضافه کنیم تا گراف ۵- منتظم از همین مرتبه بدست آید؟</p> <p>د) اگر $N_G(x) = \{b, d, c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟</p>	۱۰																																
۱/۵	 <p>با توجه به گراف مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) کران پایین عدد احاطه گری را بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی بنویسید.</p> <p>ج) یک ۷- مجموعه بنویسید. آیا این مجموعه یکتاست؟</p>	۱۱																																
۱	<p>۶ دانش آموز و ۵ معلم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف برای گرفتن عکس قرار بگیرند به طوری که:</p> <p>الف) همه معلم ها کنار هم قرار گیرند.</p> <p>ب) دانش آموزان یک در میان بین معلم ها قرار بگیرند.</p>	۱۲																																
۱	<p>شش توپ فوتبال یکسان، سه توپ والیبال یکسان و یک توپ بسکتبال را به چند طریق می توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد طوری که هر کدام یک توپ داشته باشند؟</p>	۱۳																																
۲	<p>تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 21$ را با شرایط $x_1 > 1$ و $x_2 \geq 3$ بدست آورید.</p>	۱۴																																
۲	<p>دو مربع لاتین A و B را در نظر بگیرید:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $A =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> $B =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> </div> <p>الف) آیا A و B متعامدند؟ چرا؟</p> <p>ب) یک مربع لاتین مانند C به گونه ای بنویسید که A و C متعامد باشند. ($B \neq C$) روش کار را توضیح دهید.</p>	۳	۴	۱	۲	۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۱۵
۳	۴	۱	۲																															
۴	۳	۲	۱																															
۱	۲	۳	۴																															
۲	۱	۴	۳																															
۳	۴	۱	۲																															
۱	۲	۳	۴																															
۲	۱	۴	۳																															
۴	۳	۲	۱																															

ردیف	راهنمای آزمون	نمره
۱	الف) درست 0.25 (ب) درست 0.25 (ج) درست 0.25 (د) نادرست 0.25	۱
۲	الف) یک 0.25 (ب) ۲ 0.25 (ج) مسیر 0.25 (د) $\binom{4}{2} = 6$ 0.25	۱
۳	الف) گزینه ۳ 0.5 (ب) گزینه ۴ 0.5 (ج) گزینه ۲ 0.5	۱/۵
۴	$\frac{a+3b}{2} \geq \sqrt{3ab} \Leftrightarrow a+3b \geq 2\sqrt{3ab} \Leftrightarrow a+3b-2\sqrt{3ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{3b})^2 \geq 0$ 0.25 گزاره همیشه درست 0.5	۱
۵	الف) اگر $x = \sqrt{2} - 3 \in \mathbb{Q}$ آنگاه $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4 = (\sqrt{2}-3+3)^2 - 4 = 0$ 0.25 ب) در گراف مقابل عدد احاطه گری ۴ است در صورتی که $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor = \lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 3 \neq 4$ 0.25	۱
۶	$a \equiv b \Rightarrow m a-b \Rightarrow m a+c-c-b \Rightarrow m (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \equiv b+c$ 0.25	۱
۷	$3x \equiv 121 \Rightarrow 6x \equiv 242 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = 23 - 3k$ و $k \in \mathbb{Z}$ 0.25	۱
۸	پس رقم یکان ۲ می باشد. 0.25 $3^2 \equiv 1 \Rightarrow (3^2)^{699} \equiv 1 \Rightarrow 3^{1398} \equiv 1 \Rightarrow 3^{1399} \equiv 3 \Rightarrow 3^{1399} - 5 \equiv -2 \Rightarrow 3^{1399} - 5 \equiv -2$ 0.25	۱/۵
۹	الف)  0.5 (ب)  0.5 (ج)  0.5	۱/۵
۱۰	الف) $\deg(c) = 3$ 0.25 (ب) $abeda$ 0.25 (ج) $pr = 2q \Rightarrow 8 \times 5 = 2q \Rightarrow q = 20$ 0.25 (د) $x = e$ 0.25 $\Delta(G) = 4$ 0.25 $\delta(G) = 1$ 0.25	۲
۱۱	الف) $\lfloor \frac{11}{5+1} \rfloor = 2$ 0.5 (ب) $\{i, h, a, g, c, e\}$ 0.5 (ج) $\{j, k\}$ بله یکتاست. 0.5	۱/۵
۱۲	الف) $5! \times 7!$ 0.5 (ب) $5! \times 6!$ 0.5	۱
۱۳	$\frac{10!}{3! \times 6!} = 84$ 0.25	۱
۱۴	$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$	۲

نمره	راهنمای آزمون	ردیف
	$x_r \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_r = 3 \Rightarrow y_1 + 2 + 12 + x_r + x_f = 21 \Rightarrow y_1 + x_r + x_f = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = 36 \quad +/5 \\ x_r = 4 \Rightarrow y_1 + 2 + 16 + x_r + x_f = 21 \Rightarrow y_1 + x_r + x_f = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10 \quad +/5 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">تعداد جواب ها = $36 + 10 = 46$ +/5</p>	
۲	<p>الف) بله متعامدند. زیرا برای دو عدد مثل هم از A، درآیه های نظیر از B مساوی نیستند. +/25</p> <p>ب) طبق مثال صفحه ۶۴ کتاب هر جایگشت از B یک مربع لاتین متعامد با A می سازد پس مثلاً جایگشت زیر را اعمال می کنیم تا مربع لاتین C ساخته شود. +/5</p> <p style="text-align: center;"> $4 \rightarrow 1 \qquad 3 \rightarrow 4 \qquad 2 \rightarrow 3 \qquad 1 - 2$ </p> <div style="text-align: center;"> $C = \begin{array}{ c c c c } \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$ +/75 </div>	۱۵
۲۰	موفقیت شما آرزوی ماست	