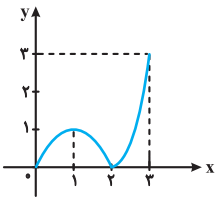


ریاضی ۳ (پایه دوازدهم رشته تجربی)



۱۴ | چون قوطی در باز است فقط برای سطح جانبی و سطح قاعده آن قرار است فلز به کار رود. لذا:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h \quad (1)$$

$$V = \pi r^2 h \rightarrow 2V\pi = \pi r^2 h \rightarrow r^2 h = 2V \rightarrow h = \frac{2V}{r^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow S = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{2V}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{4\pi V}{r}$$

$$\rightarrow S' = 2\pi r - \frac{4\pi V}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r = \frac{4\pi V}{r^2} \rightarrow 2\pi r^3 = 4\pi V$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{2V} \xrightarrow{(2)} h = 2$$

۱۵ | از دوران لوزی حول قطر بزرگ یا قطر کوچک، دو مخروط ایجاد می‌شود که قاعده‌های آن‌ها به هم چسبیده‌اند. لذا:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r \left(\frac{1}{3} \pi (r)^2 (\delta) \right)}{r \left(\frac{1}{3} \pi (\delta)^2 (r) \right)} = \frac{r}{\delta}$$

$$r\delta = |FF'| = \sqrt{(-1+r)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{r^2} = r \rightarrow c = 1 \quad | 16$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{r}{\sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow (\sqrt{r})^2 = b^2 + (1)^2 \rightarrow b^2 = r - 1 \rightarrow b = \sqrt{r-1}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{r-1} \quad \text{و} \quad \text{قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{r}$$

$$O(-1, 0), R = 2 \quad (الف | 17)$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow (x+1)^2 = 4 - y^2 \rightarrow x+1 = \pm 2 \quad (ب)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1=2 & \rightarrow x=1 & A(1,0) \\ x+1=-2 & \rightarrow x=-3 & B(-3,0) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{مرد} & \frac{40}{100} & \rightarrow & \frac{3}{100} \\ \text{زن} & \frac{60}{100} & \rightarrow & \frac{5}{100} \end{matrix} \rightarrow P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{42}{100} = 0.42$$

(الف) $+\infty$

$$(ب) \lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$(الف) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{-(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{2-x} = 5$$

عبارت منفی است

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x+2)}{-(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{2-x} = 5$$

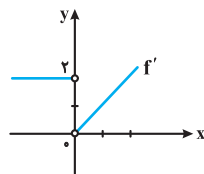
$$(ب) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} = 3$$

$$(الف) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = d$$

شیب خط مماس

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{1-0} = 2$$

$$(ب) m_B > m_A$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$(الف) f'(x) = \frac{(\epsilon x + \frac{\epsilon}{\sqrt{x}})(x^2 - 2x) - (\epsilon x^2 - 2\epsilon x)(2x - \frac{\epsilon}{\sqrt{x}})}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$(ب) g'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) \times 2x \times \sqrt{x}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/4) - f(1/2)}{1/4 - 1/2} = \frac{1/4 - 1/2}{-1/4} = 1$$

$$= \frac{\sqrt{1/4} - \sqrt{1/2}}{1/4 - 1/2} = \frac{1/2 - 1/\sqrt{2}}{-1/4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1/4} = 4(1 - \sqrt{2})$$

$$\text{آهنگ آنی} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x=1/2 \rightarrow$$

$$f'(1/2) = \frac{1}{2 \times 1/2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{اختلاف} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱۳ | الف) چون نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترم نسبی f است لذا:

$$f(2) = 1, f'(2) = 0$$

$$\rightarrow 8 + 4a + b = 1 \rightarrow 4a + b = -7 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax - \frac{x}{2} \rightarrow 12 + 4a = 0$$

$$\rightarrow a = -3 \xrightarrow{(1)} b = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x, & x < 2 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\text{ماکزیمم مطلق} \rightarrow A \left| \begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix} \right|$$

$$\text{ماکزیمم نسبی} \rightarrow B \left| \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \right|$$

$$\text{می نیمم مطلق} \rightarrow C \left| \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right|, D \left| \begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \right|$$

$$\text{می نیمم نسبی} \rightarrow D \left| \begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \right|$$

۱ | الف) صحیح $f'(x) = -2x + 2 \xrightarrow{x \leq 2} f'(x) > 0$

(ب) غلط (با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در ربع اول)

(پ) غلط (مانند تابع f با ضابطه \sqrt{x} در $x=0$)
(ت) صحیح (با توجه به خواص توابع بیوسسته)

۲ | الف) تابع باید ثابت باشد لذا:

$$f(x) = x^2(1+b) - 2ax + a^2 + \epsilon$$

$$\rightarrow 1+b=0, -2a=0 \rightarrow a+b=-1$$

(ب) اکیداً صعودی
(پ) -۱۹

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow f(2) = 2^2 \times 8 + m - 5 = 0$$

$$\rightarrow m = -19$$

(ت) سطح مقطع

۳ | الف) گزینه ۳

$$y = \epsilon x - 2 \rightarrow y = \sqrt{x} - 2 = x \rightarrow x = -1$$

(ب) گزینه ۱

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x}{4} = \cos^2 2x = \cos^2 15^\circ$$

(پ) گزینه ۲

$$(4\sqrt{f})(2) = 4 \frac{f'(2)}{\sqrt{f(2)}} = 4 \times \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

(ت) گزینه ۴

(ث) گزینه ۱

$$y = -(x^2 - 3x^2 + 2x - 1) + 1$$

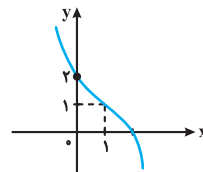
۴ |

$$\rightarrow y = -(x-1)^2 + 1$$

$$\rightarrow y-1 = -(x-1)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{y-1} = -(x-1) \rightarrow \sqrt{1-y} = x-1$$

$$\rightarrow x = \sqrt{1-y} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x} + 1$$



۵ |

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [2, +\infty)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq \frac{3}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

$$= (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$$

$$(الف) 2(\sin 2x \cos 2x) = 1 \rightarrow 2 \sin 2x = 1$$

۶ |

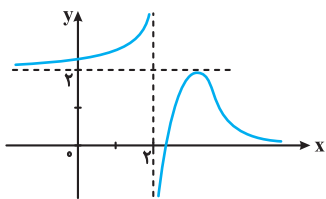
$$\rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2K\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2K\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{K\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$(ب) 2 \cos^2 x - 1 = -\cos \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos 2x = -\cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} \rightarrow 2x = 2K\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\rightarrow x = K\pi \pm \frac{3\pi}{8}$$



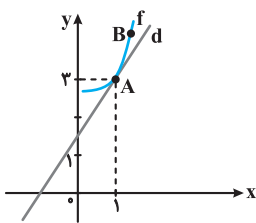
۷ نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} fof(x)$

۸ هر یک از حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x} \right)$



۹ نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ را بیابید.

ب) کدامیک از شیبهای خطوط مماس در نقاط A و B مقدار بیش تری دارد؟ فرض کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

الف) ضابطه تابع f' را بنویسید.
ب) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۱۱ مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید. (نیاز به ساده کردن نیست.)

الف) $f(x) = \frac{3x^2 + 4\sqrt{x}}{x^3 - 2x}$

ب) $g(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)^2}$

۱۲ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازه $[1/2, 1/4]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کم تر است؟

۱۳ الف) ضریب a و b را طوری تعیین کنید که نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ باشد.

ب) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x|x - 2|$ را در بازه $[0, 3]$ مشخص کنید.

۱۴ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

۱۵ یک لوزی به قطرهای 10 و 6 سانتی‌متر را یکبار حول قطر بزرگ و یک بار حول قطر کوچک آن دوران می‌دهیم. نسبت حجم جسم حاصل را در حالت اول به حالت دوم پیدا کنید.

۱۶ اگر $F(-1, 1)$ و $F'(-3, 1)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بیابید.

۱۷ دایره به معادله: $(x+1) + y^2 = 4$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.
ب) مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.

۱۸ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از 40% مرد و 60% زن باشد و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این جامعه به ترتیب 3% و 5% باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به این بیماری مبتلا است؟

ریاضی ۳ (پایه دوازدهم رشته تجربی)

بی‌تالله رضایور و محمدعلی فریبرزری عراقی

۱ کدامیک از جملات زیر صحیح و کدام غلط است؟

الف) تابع f با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ آنگاه $\tan \alpha < \sin \alpha$

پ) اگر تابع f در یک نقطه دارای خط مماس باشد آنگاه f در آن نقطه مشتق پذیر است.

ت) هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته دارای اکسترم‌های مطلق است.

۲ در جاهای خالی مقدار یا عبارت مناسب قرار دهید:

الف) برای آنکه تابع f با ضابطه $f(x) = (x-a)^2 + bx^2 + 4$ در دامنه خود هم صعودی و هم نزولی باشد، حاصل $a + b$ برابر خواهد شد.

ب) اگر در یک بازه از دامنه تابع f ، مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه تابع f در آن بازه است.

پ) اگر $f(x) = 3x + m - 5$ و $f(x) = x^2 + 4$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، مقدار m برابر است.

ت) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود آن نامیده می‌شود.

۳ گزینه صحیح را در سؤالات زیر انتخاب کنید.

الف) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به سمت چپ برده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل، نیمساز ربع اول و سوم را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

ب) حاصل عبارت $\cos^4 x - \sin^4 x$ به‌ازای $x = 15^\circ$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پ) اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ و $g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (gof)(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

ت) اگر f تابعی مشتق پذیر باشد و $f(3) = 9$ و $f'(3) = 1$ ، مقدار $(4\sqrt{f})'(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

ث) به‌ازای کدام مقادیر m ، خط $2y = x + m$ دایره $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 2x$ را در دو نقطه قطع می‌کند؟

۱) $-8 < m < 2$ ۲) $-2 < m < 8$
۳) $m < -8$ یا $m > 2$ ۴) $m < -2$ یا $m > 8$

۴ ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ را رسم کرده، سپس ضابطه وارون آن را به‌دست آورید.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 3x^2 - 1$ دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۶ جواب معادلات مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $4 \sin 2x \cos 2x = 1$

ب) $2 \cos^2 x = 1 - \cos 45^\circ$