

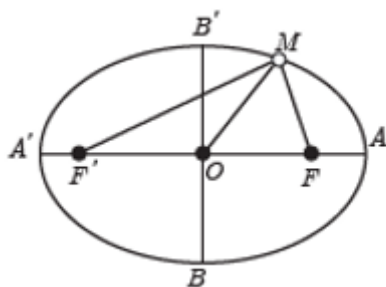
بسمه تعالی

دبیرخانه استانی مدیران متوسطه نظری با همکاری اداره تکنولوژی گروههای آموزشی متوسطه استان

سوالیات امتحان شبه نهایی: هندسه ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحات: ۲
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	نام و نام خانوادگی:

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.	بارم
------	---	------

۱	درستی و یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد. ب) نقطه $A(1, -2)$ داخل دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد.	۱
۲	الف) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} A & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ مقدار $ A $ برابر است. ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس می نامیم.	۱
۱/۵	۳ اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، الف) حاصل ماتریس $A \times B$ را بیابید. ب) دترمینان ماتریس $A + B$ را بیابید.	۳
۱	۴ به ازای چه مقدار m ، ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+2 & 3 \\ 2 & m+1 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس وارون پذیر است؟	۱
۱/۵	۵ از رابطه $A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را بیابید.	۱/۵
۱	۶ الف) نقاط A ، B ، C و D در صفحه مفروضند. نقطه ای در این صفحه بیابید (در صورت وجود) که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. ب) خط d و نقطه A به فاصله ۳ از خط d ، در صفحه مفروضند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A به فاصله ۲ و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد.	۱
۱/۵	۷ وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 + 2x = 3$ و $x^2 + y^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$ را نسبت به هم تعیین کنید.	۱/۵
۱/۵	۸ دایره ای از دو نقطه $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره را بدست آورید.	۱/۵
۲	۹ نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ به گونه ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است: الف) نشان دهید: $OM = OF = OF'$ ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است. ج) طول های MF و MF' را بدست آورید.	۲



بسمه تعالی

دبیرخانه استانی مدیران متوسطه نظری با همکاری اداره تکنولوژی گروههای آموزشی متوسطه استان

سوالیات امتحان شبه نهایی: هندسه ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحات: ۲
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	نام و نام خانوادگی:

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.	بارم
۱۰	سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.	۲
۱۱	نقاط $A = (2, -4, 3)$ ، $B = (-2, -1, -3)$ و $C = (2, 7, 3)$ را در فضا در نظر می‌گیریم. کدامیک از نقاط روی خط $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟	۱
۱۲	بردارهای $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ را در نظر بگیرید. طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را تعیین کنید.	۱/۵
۱۳	اگر $\vec{a} = (2, -1, 2)$ ، $\vec{b} = (-2, 3, 1)$ و $\vec{c} = (-1, -1, 2)$ باشند، تصویر قائم بردار \vec{a} را روی بردار $\vec{b} + \vec{c}$ بدست آورید.	۱/۵
۱۴	اگر سه بردار $\vec{a} = (0, -1, 2)$ ، $\vec{b} = (m, -1, 3)$ و $\vec{c} = (4, 1, 2)$ در یک صفحه باشند، مقدار m را تعیین کنید.	۲
	موفق و سربلند باشید.	۲۰
	جمع نمره	

۱- الف) نادرست - در این حالت دستگاه به‌شمار جواب دارد.

ب) درست
 مرکز: $O(1, -1)$

شعاع: $R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+1)^2} = 1 \Rightarrow OA < R$

۲- الف) $|A| = 5|A| - 36 \Rightarrow 4|A| = 36 \Rightarrow |A| = 9$

ب) اسکالر

۳- الف) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 12 \\ -1 & 12 & 11 \\ 3 & 21 & 42 \end{bmatrix}$

ب) $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |A+B| = (156 + 12 + 0) - (24 + 18 + 0) = 124$

۴- $|A| \neq 0 \Rightarrow (m+2)(m+1) - 6 \neq 0$

$\Rightarrow m^2 + 3m + 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 \neq 0$

$\Rightarrow (m+4)(m-1) \neq 0 \Rightarrow m \neq 1, -4$

۵- فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$B^{-1} = \frac{1}{5 \times 1 - 2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$AB = C \Rightarrow A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$

۶- الف) نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشند، روی محور منصف پاره خط AB
و نقطه‌ای که از C و D به یک فاصله باشند، روی محور منصف پاره خط CD قرار دارند.
نقطه تلاقی این دو محور منصف جواب مسئله است.

ب) نقطه‌ای از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر و نقطه‌ای از صفحه که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، روی دو خط موازی با خط d در طرفین آن و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن قرار دارند. محل برخورد این دو خط با دایره جواب مسئله است.

$$C: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{مرکز: } O(-1, 0) \quad \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 - 4(-3)} = 2$$

$$C': (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$\text{مرکز: } O'(-1, 1) \quad \text{شعاع: } R' = 3$$

$$OO' = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-0)^2} = 1 \Rightarrow OO' = |R - R'| \quad \text{دو دایره هم‌محک داخل‌اند}$$

۸- فرض کنید مرکز دایره نقطه $O(x, 2x)$ باشد. اگر $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ در نظر گرفته شوند، آنگاه داریم:

$$AO = BO \Rightarrow \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{ب توان ۲}} x^2 + 4x^2 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{شعاع: } R = AO = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5 \times 1^2} = \sqrt{5}$$

۹- الف) $2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
ب) $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

$$FF' = 2c = 8 \Rightarrow OF = OF' = 4 \Rightarrow OF = OF' = OM$$

ب) چون محل میانه وارد بر ضلع FF' در میانه MFF' و نصف طول این ضلع است، پس مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، یعنی $\widehat{FMF'} = 90^\circ$.

$$MF + MF' = 2a = 10 \quad \xrightarrow{MF=x} \quad MF' = 10 - x \quad (ج-۹)$$

طبقاً قضیه فیثاغورس در مثلث $MF F'$ داریم:

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow x^2 + (10-x)^2 = 18^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 324 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} MF = 5 - \sqrt{7} \\ MF' = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$$

۱۰. معادله سهمی را به حالت متعارف تبدیل می‌کنیم.

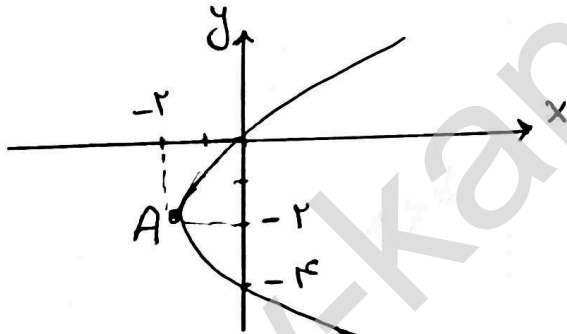
$$y^2 = 2x - 4y \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

رأس: $A(-2, -2)$

رسانه سهمی رو به راست است و داریم:

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

کانون: $F(h+a, k) = (-2 + \frac{1}{2}, -2) \Rightarrow f(-\frac{3}{2}, -2)$



برخورد با محورهای $x=0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(y+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$

برخورد با محورهای $y=0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x=0$

بنابراین نقاط برخورد با محورهای شامل دو نقطه $Q(0,0)$ و $B(0,-4)$ است.

۱۱. نقاط $A=(2, -4, 3)$ و $C=(2, 7, 3)$ روی خط $\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases}$ قرار دارند و چون

مختصات آنها در معادله این خط صدق می‌کند.

۱۲. $\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 3, -1) - 2(2, -1, 0) = (-2, 5, -1)$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (-2, 3, 1) + (-1, -1, 2) = (-3, 2, 3) \quad -13$$

اگر \vec{a}' تصویر بردار \vec{a} روی بردار \vec{d} ($\vec{b} + \vec{c}$) باشد، آنگاه داریم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{-6 - 2 + 6}{9 + 4 + 9} (-3, 2, 3) = \frac{-2}{11} (-3, 2, 3)$$

۱۴- شرط هم‌صفه بودن سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} آن است که $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ باشد،

بنابراین داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ m & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

رستورساروی $\rightarrow (0 - 12 + 2m) - (-8 + 0 - 2m) = 0$

$$\Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow m = 1$$