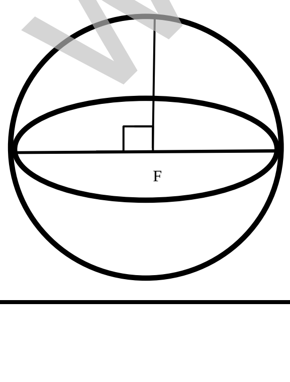
نام و نام خانوادگی: پایه: رشته تحصیلی: تعداد صفحات: ۱	جمهوری اسلامی ایران اداره کل آموزش و پرورش استان سیستان و بلوچستان **اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ زاهدان** آزمون شبه نهایی اردیبهشت ۱۴۰۲	نام درس: هندسه ۳ تاریخ امتحان: / / مدت امتحان: ۹۰ دقیقه ساعت شروع: نوبت صبح

زیبایی زندگی به ریاضیات است و زیبایی ریاضیات به هندسه.

ردیف	سؤالات	بارم
۱	**مفاهیم زیر را تعریف کنید.** **الف) ماتریس ب) ماتریس قطری ج) مکان هندسی د) ضرب داخلی دو بردار**	۲
۲	**ثابت کنید ضرب خارجی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ بر هر دو بردار عمود است.**	۲
۳	**ثابت کنید اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b)$ باشد آنگاه** $\cos\theta=\frac{\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2-\lvert a-b\rvert^2}{2\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	۲/۲۵
۴	**اگر $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ حاصل A^3-A^2-A را به دست آورید.**	۰/۷۵
۵	**برای ماتریس 2×2 و دلخواه A ثابت کنید $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$**	۲
۶	**در چه صورتی فصل مشترک یک رویه ی مخروطی و یک صفحه دایره ای، بیضی و یا سهمی می شود؟ شرح دهید.**	۱
۷	**از مثلث PQR اندازه ضلع QR و ارتفاع PH و مجموع اندازه ی اضلاع داده شده است داده شده است. با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.**	۱/۵
۸	**دستگاه مقابل را با استفاده از روش ماتریس وارون حل کنید.** $\begin{cases}x-2y=3\\2x+y=5\\-3x+6y=-9\end{cases}$	۱/۵
۹	**نقطه O مبدا مختصات و بردار $\overrightarrow{OA}=3i+j$ و $\overrightarrow{OB}=-i+5j$ مفروض اند. اگر $M=(x,y,z)$ و $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.**	۲
۱۰	**در شکل مقابل قطر دایره بر قطر بیضی منطبق است و نقطه F کانون بیضی است. اگر طول قطر کوچک بیضی برابر ۱۴ باشد طول MF را به دست آورید.**  	۱/۷۵
۱۱	**اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ درایه های سطر اول ماتریس A^4 را به دست آورید.**	۲
۱۲	**برای دو ماتریس 3×3 ، B و A تساوی $A\times B=B\times A$ را اثبات یا با ارائه مثال نقض رد کنید.**	۱/۷۵
※	نمره با عدد : نمره با حروف : — تاریخ: / / امضاء — جمع بارم	۲۰

۱ - الف) ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود.

ب) ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

ج) مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند.

د) ضرب داخلی دو بردار: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در R^3 باشند
در این صورت ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ در $\vec{b}$ که با نماد $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر
تعریف می‌کنیم:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

---

۲ -

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ $\quad\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ و $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

(3

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ $\quad\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ $\quad|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ $\quad|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$

θ : زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\to \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \to \cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(4

$$A^2=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&25\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64&0&0\\0&-64&0\\0&0&125\end{bmatrix}$$

$$A^3-A^2-A=\begin{bmatrix}64&0&0\\0&-64&0\\0&0&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-16&0&0\\0&-16&0\\0&0&-25\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44&0&0\\0&-76&0\\0&0&-15\end{bmatrix}$$

حنانه عابدینی - مسئول درس ریاضی ۱ گروه دهم ریاضی

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2\,a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{bmatrix}$$

$$|AB|=(a_1b_1+a_2b_3)(a_3b_2+a_4b_4)-(a_1b_2+a_2b_4)(a_3b_1+a_4b_3)$$

$$|AB|=\underline{a_1b_1a_4b_4}+\underline{a_2b_3a_3b_2}-a_1b_2a_4b_3\ \underline{-a_2b_4a_3b_1} \quad (1)$$

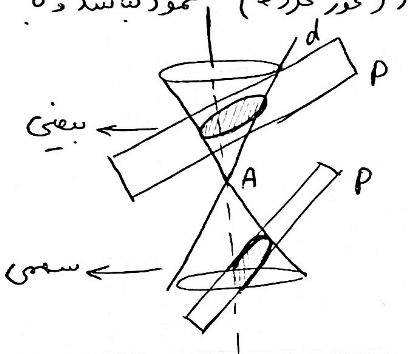
$$|A|=(a_1a_4-a_2a_3) \qquad |B|=(b_1b_4-b_2b_3)$$

$$|A||B|=\underline{a_1b_1b_4a_4}+\underline{a_2b_2a_3b_3}-\underline{a_2a_3b_1b_4}-\underline{a_1b_2a_4b_3} \quad (2)$$

$$(2),(1) \longrightarrow |AB|=|A||B|$$

---

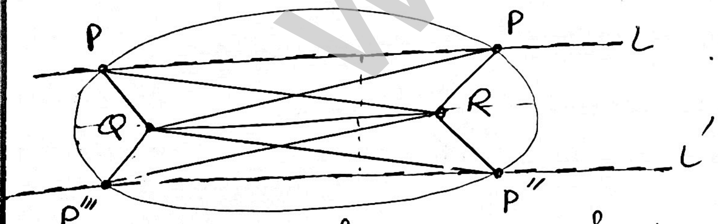
6 – حالتی که بیضی می‌شود ← در حالتی که صفحه دایره‌ای (صفحهٔ P) بر محور T (محور مخروط) عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند.



حالتی که سهمی می‌شود ← اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است.

---

7 –



ضلع QR را فاصله بین دو کانون لوزی در نظر می‌گیریم.

بنابراین $PQ+PR=2a$

مکان هندسی نقطهٔ P (طبق خواص لوزی) لوزی مقابل می‌تواند باشد پس بی‌نهایت مثلث با قاعده QR داریم.
اندازه ارتفاع PH را داریم بنابر دو خط L و L' را موازی با QR و به فاصلهٔ PH از آن رسم می‌کنیم.
محل برخورد این دو خط با لوزی، می‌تواند رأس سوم مثلث باشد. بنابراین ۴ مثلث با شرایط گفته شده در صورت سؤال داریم.

(8

$$\begin{cases} \mathrm{I}\ x - 2y = 3 \\ \mathrm{II}\ 2x + y = 5 \\ \mathrm{III}\ -3x + 6y = -9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I},\mathrm{II}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A = I \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A| = 5 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I},\mathrm{III}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow$$ جواب ندارد

$$\xrightarrow{\mathrm{II},\mathrm{III}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} \rightarrow |C| = 15$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 39 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(9

$$O = (0,0,0) \longrightarrow \vec{A} = (3,1,0) \quad , \quad \vec{B} = (-1, 5, 0)$$

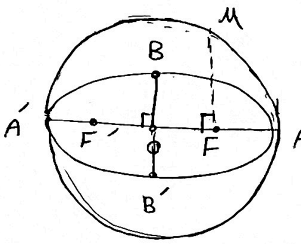
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-1-3)\vec{i} + (5-1)\vec{j} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{M} - \vec{A} = (x-3)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}(-4\vec{i} + 4\vec{j}) = -3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\rightarrow x - 3 = -3 \rightarrow x = 0 \qquad y - 1 = 3 \rightarrow \boxed{y = 4} \qquad z = 0$$

$$\boxed{x + y + z = 4}$$



$BB' = 14 \rightarrow OB = OB' = 7 = b$

$BF = a = \dfrac{AA'}{2} = R_{\text{دایره}} \qquad OM = R_{\text{دایره}}$

رابطهٔ فیثاغورس در $B\hat{O}F$: $BF^2 = OF^2 + BO^2 \longrightarrow R^2 = OF^2 + 7^2$

رابطهٔ فیثاغورس در در $O\hat{M}F$: $OM^2 = OF^2 + FM^2 \rightarrow R^2 = OF^2 + FM^2$

$\rightarrow \boxed{FM = 7}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad - 11$$

$$A = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

12 - در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت جابه جایی ندارد پس با مثال نقض آن را رد می کنیم.

(تنها در صورتی این خاصیت برقرار است که A و B وارون یکدیگر باشند؛ در این صورت $(AB = BA = I)$)

مثال نقض $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$B \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow A \times B \neq B \times A$

حنانه عابدینی

۱۴۰۲/۲/۷

۰۱۵۵۰۰۳۵۳۹۱

هندسه ۳ـ زاهدان   سحا نمونژاد - رتبه ۸۶ کنکور سراسری

۱- الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود

ب) ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند

ج) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند

د)

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

۲-

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \underline{a_1a_2b_3} - \underline{a_1a_3b_2} + \underline{a_2a_3b_1} - \underline{a_1a_2b_3} + \underline{a_1a_3b_2} - \underline{a_3a_2b_1} = 0$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \underline{a_2b_1b_3} - \underline{a_3b_1b_2} + \underline{a_3b_1b_2} - \underline{a_1b_2b_3} + \underline{a_1b_2b_3} - \underline{a_2b_1b_3} = 0$$

۳- می‌دانیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \underbrace{2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}_{\vec{a}\cdot\vec{b}} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = \cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - \cancel{|a|^2} - \cancel{|b|^2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \longrightarrow \quad 2a\cdot b = 2a\cdot b$$

۴- می‌دانیم حاصلضرب ماتریس‌های قطری درهم ماتریسی است قطری که فقط درایه‌های نظیر به نظیر قطر در هم ضرب می‌شوند لذا داریم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - A^2 - A = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 0 & 0 \\ 0 & -76 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{bmatrix}$$

۵-

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = eh - gf$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$$|A||B| = (ad-bc)(eh-gf)$$

$$|A \times B| = \cancel{aecf} + aedh + bgcf + \underline{\underline{bgdh}} - \cancel{afce} - afdg - bhce - \underline{\underline{bhdg}}$$

$$= aedh - afdg + bgcf - bhce = ad(eh - fg) - bc(he - gf)$$

$$= (ad - bc)(he - gf) = |A||B|$$

۶- دایره: درحالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند

بیضی: درحالتی که صفحه‌ی P بر محور L عمود نباشد و با مولد L نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند

سهمی: اگر صفحه‌ی P با مولد L موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند

۷- با توجه به اینکه مجموع اندازه‌ی اضلاع برابر ۲ است و همچنین طول ضلع QR را داریم پس مجموع طول دو ضلع دیگر یک عدد ثابت است

ابتدا پاره‌خط QR را رسم می‌کنیم حال چون مجموع فواصل نقطه‌ی P از ۲ سر پاره‌خط QR ثابت است پس طبق تعریف مکان هندسی بیضی نقطه‌ی P مکان هندسی نقاطی از صفحه است که روی محیط بیضی‌ای به کانون‌های Q و R قرار دارند و از آنجا که طول ارتفاع PH را داریم در نتیجه مکان هندسی نقاط P، محل برخورد نقاط روی محیط بیضی به کانون‌های Q,R و طول قطر بزرگ PQ+PR و همچنین ۲ خط موازی با پاره‌خط QR به فاصله‌ی PH از آن است

۸-

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=5 \\ -3x+6y=-9 \end{cases}$$

چون ۳ معادله‌ی ۲ مجهولی داریم ابتدا دستگاه ۲ معادله‌ی ۲ مجهولی را حل می‌کنیم سپس جواب‌های به‌دست آمده را در معادله سوم صدق می‌دهیم

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$AX=B \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}\times A\times X = A^{-1}\times B \Longrightarrow X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{1-(-4)}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$-3\left(\frac{13}{5}\right)+6\left(\frac{-1}{5}\right)=-\frac{39}{5}-\frac{6}{5}=\frac{-45}{5}=-9$$

پس جواب‌های به‌دست آمده قابل قبولند

۹-

$A=(3,1,0)$

$B=(-1,5,0)$

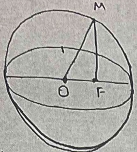
$M=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AM}=(x-3,y-1,z)$

$\overrightarrow{AB}=(-4,4,0)$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \longrightarrow \begin{cases} x-3=-3 \\ y-1=3 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=0 \end{cases} \quad x+y+z=4$$

۱۰-



$2a =$ قطر بزرگ بیضی

$2b =$ قطر کوچک بیضی $= 14$

$2c =$ فاصله کانونی

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow \underline{a^2 - c^2 = 49}$$

$$2a = 2R \longrightarrow a = R$$

$$OM = R = a$$

$$OM^2 = OF^2 + MF^2$$

$$a^2 = c^2 + MF^2 \longrightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = 49$$

$$\longrightarrow \boxed{MF = 7}$$

۱۱-

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۱۲- می‌دانیم ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد لذا با یک مثال ساده این را نقض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B \neq B \times A$$