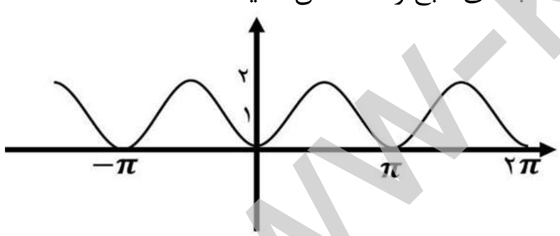
به نام خداوند جان و خرد

ساعت شروع: **۸ صبح**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۲/۱۶**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته : **علوم تجربی**	سؤالات میان نوبت درس: **ریاضی ۳**	
دانش آموزان روزانه دوره دوم متوسطه **پایه دوازدهم** شهر تهران در **اردیبهشت ماه** سال **۱۴۰۲**		اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	

ردیف	سـؤالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** الف) تابع $f(x)=-۱-x^{۳}$ در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی است. ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=-۲\tan(\frac{x}{۳})$ برابر $x\neq ۳k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ است. پ) نمودار $y=\sin ۲x$ از انبساط عمودی نمودار $y=\sin x$ در راستای محور yها بدست می‌آید.	۰/۷۵
۲	**جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.** الف) با توجه به مثبت بودن r، معادله ی $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ معادله‌ی یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه‌ی........................ برقرار باشد. ب) شکل حاصل از دوران یک مربع حول یک ضلع آن،...........نام دارد. پ) اگر صفحه p با مولد سطح مخروطی .... و از رأس ....، شکل حاصل سهمی نام دارد. ت) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یک نقطه‌ی........... آن است.	۱/۲۵
۳	اگر $f(x)=\frac{۲}{x}, g(x)=\frac{x}{x-۳}$ ، دامنه‌ی $fog(x)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۴	وارون تابع زیر را به دست آورید. $f(x)=۱+\sqrt{x+۲}$	۱
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه ی $y=a\cos bx+c$ است. ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید. 	۱/۵
۶	جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin x-\cos ۲x=۰$ را به دست آورید.	۱
۷	حدود زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۲-\frac{۱}{x^{۲}}}{x-۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}}\frac{۱}{\cos x}$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}-۴x+۱}{۲x^{۲}+x-۱}$	۱/۷۵
	ادامه سؤالات در صفحه دوم	

به نام خداوند جان و خرد

ساعت شروع: **۸ صبح**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۲/۱۶**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته : **علوم تجربی**	سؤالات میان نوبت درس: **ریاضی ۳**	
دانش آموزان روزانه دوره دوم متوسطه **پایه دوازدهم** شهر تهران در **اردیبهشت ماه** سال **۱۴۰۲**		اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	

ردیف	ســــــــــؤالات	بارم
۸	مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست.) $f(x)=(\sqrt{x}-۱)^{۲}(\frac{۱}{x})$	۱
۹	تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x \prec ۰ \\ x^{۲}-۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد. ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. پ) نمودار f' را رسم کنید.	۲
۱۰	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=۲t^{۲}-t$ است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی $[۰,۴]$ ، برابر است؟	۱
۱۱	اگر تابع $f(x)=ax^{۲}+bx$ در $x=-۱$ دارای مینیمم نسبی ۱- باشد، مقادیر a,b را بیابید.	۱/۲۵
۱۲	مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۴}{۳}x^{۳}-x+۲$ را در بازه ی $[۰,۱]$ به دست آورید.	۱/۵
۱۳	نشان دهید در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۲۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.	۱/۵
۱۴	خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۲}{۳}$ و طول قطر کانونی آن۱۲ است. طول قطر کوچک بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	دو دایره‌ی زیر نسبت به هم چه وضعی دارند؟ $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۴y=۹ \quad , \quad x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y=۴$	۲
	موفق باشید. جمع نمرات	۲۰

پاسخ تشریحی ریاضی ۳ تجربی - تهران   ۱۴۰۲/۲/۱۶   احسان غنی زاده

سوال ۱) الف) درست   ب) نادرست   ج) نادرست

سوال ۲) الف) $a^2+b^2-4c>0$ ب) استوانه   ج) موازی - عبور نکند

ت) بحرانی

سوال ۳)

$D_{f\circ g}=\{x|x\in D_g ,\ g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{3\}$ $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\to D_{f\circ g}=\{x|x\in \mathbb{R}-\{3\},\ \frac{x}{x-3}\neq 0\} \to D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{0,3\}$

سوال ۴)

$f(x)=1+\sqrt{x+2}$ $x\geq 2 \longrightarrow y-1=\sqrt{x+2}$

$(y-1)^2=x+2 \longrightarrow x=(y-1)^2-2 \longrightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2-2$

$D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

سوال ۵)

$max=2 \to |a|+c=2$

$min=0 \to -|a|+c=0$ $\longrightarrow c=1 ,\ a=-1$

$T=\pi \to \frac{2\pi}{|b|}=\pi \to |b|=2$

$\to y=-\cos 2x+1$

سوال ۶)

$\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \to 2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\to \sin x=t \to 2t^2+t-1=0 \to t^2+t^2+t-1=0 \to t(t+1)+(t-1)(t+1)=0$

$\to (t+1)(t+t-1)=0 \to \begin{cases} t=-1 \to \sin x=-1 \to x=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \\ t=\frac{1}{2} \to \sin x=\frac{1}{2} \to x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$

$x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

سوال ۷)

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{x-1}=$ $\text{Lim}\ \frac{3x^2-1}{x^3-x^2}\longrightarrow \frac{3x^2}{x^3}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ادامه‌ی سوال ۷)

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{رفع مبهم}} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{2(x+1)(x-\frac{1}{2})}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4(x-\frac{1}{2})^2}{2(x+1)(x-\frac{1}{2})} = 0$

سوال ۸)

$f'(x) = 2(\sqrt{x}-1)(\frac{1}{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + (\frac{-1}{x^2})(\sqrt{x}-1)^2$

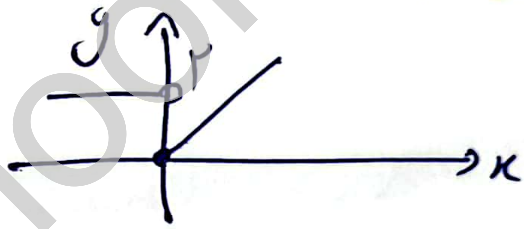
سوال ۹)

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1$

$f'_+(0) = 0 \quad f'_-(0) = 2 \rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \rightarrow$ مشتق وجود ندارد

ب) $f'(x) = \begin{cases} 2 & x<0 \\ 2x & x\geq 0 \end{cases}$

ج)



سوال ۱۰)

$f'(t) = 4t-1 \qquad \bar{v} = \dfrac{f(4)-f(0)}{4-0} = \dfrac{28}{4} = 7$

$\rightarrow 4t-1=7 \rightarrow 4t=8 \rightarrow t=2$

سوال ۱۱)

$f(-1) = -1 \rightarrow a-b=-1 \longrightarrow a-2a=-1$

$f'(-1)=0 \rightarrow 2a(-1)+b=0 \rightarrow b=2a \rightarrow \boxed{a=1}$

$b=2$

سوال ۱۲)

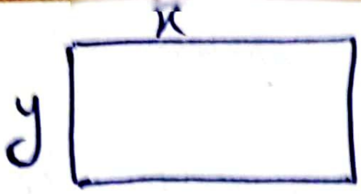
$f'(x) = 4x^2-1 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$\rightarrow x=0 \rightarrow f(0)=2$

$x=1 \rightarrow f(1) = \frac{4}{3} - 1 + 2 = \frac{7}{3} \rightarrow$ max مطلق

$x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1-3+12}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \rightarrow$ min مطلق

سوال ۱۳)



$$\rightarrow 2(x+y)=24 \rightarrow x+y=12$$
$$\rightarrow y=12-x$$

$$S_{max}=xy \xrightarrow{y=x} S=(12-x)^2$$

$$\rightarrow S'=2(12-x)(-1)=0 \rightarrow x=12$$

$$y=12$$

سوال ۱۴)

$$e=\frac{2}{3} \quad 2a=12 \rightarrow a=6 \rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}=\frac{c}{6}$$
$$\rightarrow c=4$$

$2b=?$ $\quad 2c=?$

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 36=b^2+16 \rightarrow b^2=20 \rightarrow b=2\sqrt{5}$$
$$\rightarrow 2b=4\sqrt{5}$$

$2c=8$

سوال ۱۵)

A دایره : $x^2+y^2+2x-4y-9=0 \rightarrow O_A=(-1,2), R_A=\sqrt{14}$

B دایره : $x^2+y^2-2x+4y-4=0 \rightarrow O_B=(+1,-2), R_B=3$

$$O_AO_B=\sqrt{(1-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

$|R_A-R_B|<2\sqrt{5}<R_A+R_B \longrightarrow$ دو دایره متقاطع هستند