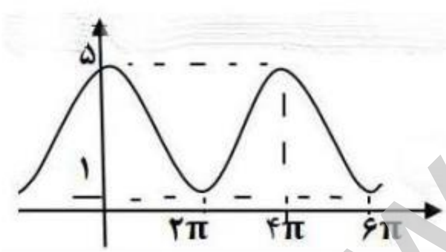
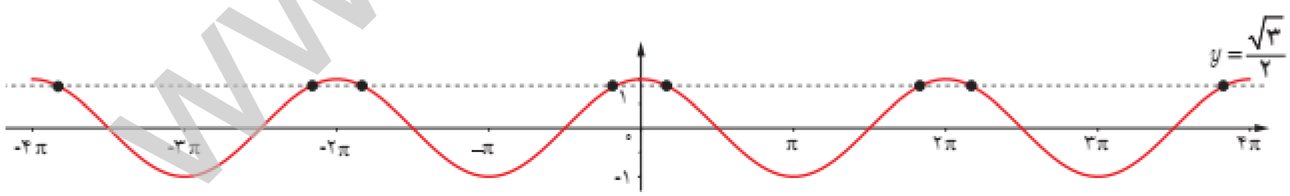
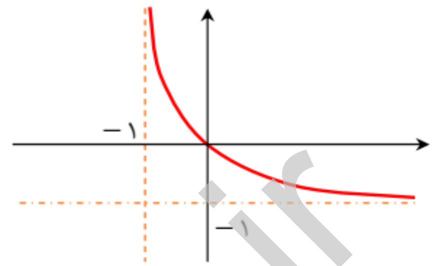
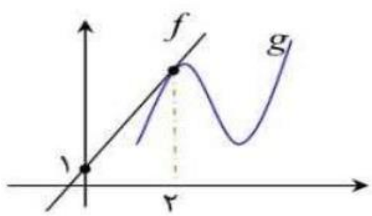
باسمه تعالی

سوالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳	رشته : علوم تجربی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :		تاریخ: ۱۴۰۲ /۰ ۲/۱۳	تعداد صفحه: ۲ صفحه
دانش آموزان پایه دوازدهم در **اردیبهشت ماه** سال ۱۴۰۲		اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین	

ردیف	**سوالات**(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است)	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = ۲ + ۳x^۲(۱ - x)$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. ب) تابع $f(x) = \|x - ۲\| + \|x - ۱\|$ روی بازه $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است. پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است. ت) باقیمانده تقسیم عبارت $۲x^۲ - ۶x - ۱$ بر $x - ۲$ برابر ۵ است. ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است.	۱/۲۵
۲	جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید. الف) در تابع $f(x) = ۳x^۳ + ax^۲ + ۱۱$ داریم $f''(۱) = -۹$ ، مقدار a برابر است با .... ب) اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۵,-۱)\}$ و $g = \{(-۲,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$ باشد حاصل $(fog)^{-۱}(۴)$ برابر است با .... ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است.	۰/۷۵
۳	اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $(-۱,۲)$ و برد آن $[-۲,۳]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = -۳f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$ را بدست آورید.	۰/۵
۴	اگر $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ و $g(x) = ۳x - ۲$ باشد، ضابطه و دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید.	۱
۵	ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.  	۱
۶	نمودار تابع با ضابطه ی $y = \cos(x)$ و خط به معادله ی $y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.  	۱
۷	حاصل حدود زیر را بیابید. الف) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{\|۲x-۱\|}$ ب) $\lim_{x\to(-۱)} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$	۱/۷۵

ادامه سوالات در صفحه دوم

سوالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳	رشته : علوم تجربی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :		تاریخ: ۱۴۰۲/ ۰۲/۱۳	تعداد صفحه: ۲ صفحه
دانش آموزان پایه دوازدهم در **اردیبهشت ماه** سال ۱۴۰۲		اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین	

ردیف	**سوالات**(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است)	نمره
۸	نمودار تابع f به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید.  الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = \cdots$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$	۰/۵
۹	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^۳ + ۲x - ۱$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید.	۱
۱۰	در شکل زیر تابع خطی f در نقطه $x = ۲$ بر نمودار تابع g مماس شده است. اگر $\lim\limits_{x\to۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = ۴$ باشد مقدار $f(۱) + g(۲) + g'(۲)$ را محاسبه کنید. 	۱/۲۵
۱۱	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & x \le ۱ \\ ۲x^۳ & x > ۱ \end{cases}$ را در نقطه ی $x = ۱$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ب) $f(x) = \frac{۲\sqrt{x}+۳}{x+۷}$ الف) $g(x) = (x^۲ + ۱)(۳x - ۵)x^۲$	۱/۵
۱۳	گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه $V = ۶۰(۱ - \frac{t}{۵۰})^۲$ بدست آید: الف) آهنگ تغییرمتوسط در بازه ی زمانی [۰,۳۰] چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییرلحظه ای $\frac{-۴۸}{۲۵} L/S$ است؟	۱
۱۴	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟	۱/۵
۱۵	نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^۴ - ۴x^۲ + ۲$ را در بازه [-۱,۳] بدست آورید.	۱/۵
۱۶	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کناربگذاریم سپس لبه ی جعبه رابه اندازه ی x برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت $V = (۶۰ - ۲x)^۲x$ است . مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟	۱/۲۵
۱۷	کانون های یک بیضی (۱,-۵) و (۱,۳) است، اگر $a = ۶$ باشد : الف) مرکز بیضی را بیابید. ب) اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.	۱/۷۵
	ریاضیات را باید به همه آموخت نه برای ریاضی دان شدن، بلکه برای خردمند شدن جمع نمره	۲۰

بنام خدا

پاسخ از : نرگس فتح اللهی

۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=2+3x^2(1-x)$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. ص ب) تابع $f(x)=\lvert x-2\rvert+\lvert x-1\rvert$ روی بازه $[1,+\infty)$ اکیدا صعودی است. غ پ) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است. غ ت) باقیمانده تقسیم عبارت $2x^3-6x-1$ بر $x-2$ برابر ۵ است. غ ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است. ص	۱/۲۵

۲	جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید. الف) در تابع $f(x)=3x^3+ax^2+11$ داریم $f''(1)=-9$ ، مقدار a برابر است با $-\frac{27}{2}$ ب) اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,-1)\}$ و $g=\{(-2,2),(0,1),(2,-1)\}$ باشد حاصل $(fog)^{-1}(4)$ برابر است با 0 ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیمکره است.	۰/۷۵

الف)

$$f'(x)=9x^2+2ax \rightarrow f''(x)=18x+2a$$

$$f''(1)=-9 \rightarrow -9=18+2a \rightarrow a=-\frac{27}{2}$$

ب)

$$(fog)^{-1}(4)=(g^{-1}of^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))=g^{-1}(1)=0$$

ت)

نیمکره

۳	اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر $(-1,2)$ و برد آن $[-2,3]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=-3f\left(\frac{x}{2}\right)+1$ را بدست آورید.	۰/۵

دامنه $D_f=(-1,2) \xrightarrow[\text{۲ برابر می‌شود}]{\text{در } f(\frac{x}{2}) \text{ طول نقاط}} D_g=(-2,4)$

برد $R_f=[-2,3] \rightarrow R_{f(\frac{x}{2})}=[-2,3] \rightarrow R_{-3f(\frac{x}{2})}=[-9,6]$

$$R_{-3f(\frac{x}{2})+1}=[-8,7]$$

۴	اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=3x-2$ باشد، ضابطه و دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید.	۱

$D_f: x \geq 2 \qquad D_g = \mathbb{R}$

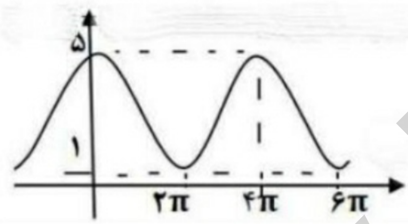
$fog = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-2} = \sqrt{3x-2-2} = \sqrt{3x-4}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{3x-2 \in x \geq 2}_{B}\}$

$B: 3x-2 \geq 2 \rightarrow 3x \geq 4 \rightarrow x \geq \frac{4}{3}$

$D_{fog} = A \cap B = \mathbb{R} \cap [\frac{4}{3}, +\infty) = [\frac{4}{3}, +\infty)$

۵	ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.	۱



خط مماس در $x=0$ افقی است. پس نمودار مربوط به $y=a\cos bx+c$ است.

$c = \frac{max+min}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \rightarrow c=3$

$|a| = \frac{max-min}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \xrightarrow[a>0]{\text{قله روی محور}} a=2$

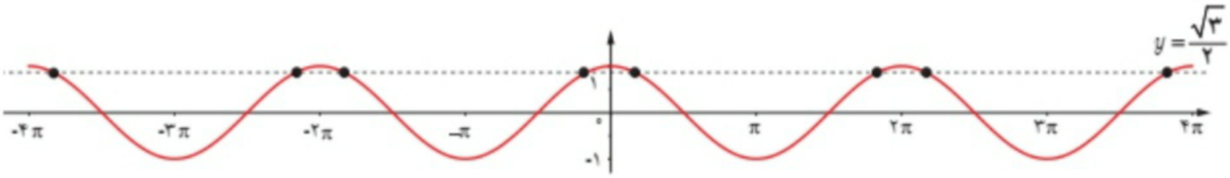
$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$

b هر دو مقدار می‌تواند باشد.

$\boxed{y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3}$

یا

$\boxed{y = 2\cos(-\frac{x}{2}) + 3}$

۶	نمودار تابع با ضابطه ی $y=\cos(x)$ و خط به معادله ی $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید. 	۱

$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}\longrightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$k=0 \longrightarrow x=\pm\frac{\pi}{۶}$

$k=۱ \longrightarrow x=۲\pi\pm\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$

$k=۲ \longrightarrow x=۴\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲۳\pi}{۶}$

$k=-۱ \longrightarrow x=-۲\pi\pm\frac{\pi}{۶}=\frac{-۱۳\pi}{۶}$ و $-\frac{۱۱\pi}{۶}$

$k=-۲ \longrightarrow x=-۴\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{-۲۳\pi}{۶}$

۷	حاصل حدود زیر را بیابید.		۱/۷۵
	الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{\lvert ۲x-۱\rvert}$	ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$	

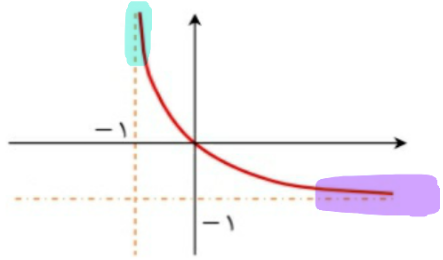
الف) $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{[\frac{۱}{۲}^+]-۳}{۲x-۱}=\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-۳}{۲x-۱}=\frac{-۳}{0^+}=-\infty$

ب) $\lim\frac{۱-۱}{-۱+۱}=\frac{0}{0}$ مبهم $\longrightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x+\sqrt{۲x+۳})(x-\sqrt{۲x+۳})}$

$=\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x-۱)\cancel{(x+۱)}(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-۲x-۳=\cancel{(x+۱)}(x-۳)}=\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x-۳}$

$=\frac{(-۱-۱)(-۱-\sqrt{-۲+۳})}{-۱-۳}=\frac{-۲(-۲)}{-۴}=-۱$

۸	نمودار تابع f به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید. الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = \cdots$ $+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$ -1	۰/۵



۹	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^۳ + ۲x - ۱$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید.	۱

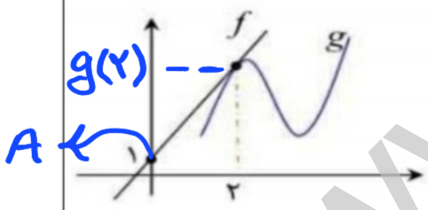
$f(1) = -1+2-1 = 0 \longrightarrow$ نقطه مماس $A(1,0)$

$f'(x) = -3x^2+2 \longrightarrow$ شیب خط مماس $= m = f'(1) = -1$

معادله خط مماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 0 = -(x-1) \longrightarrow y = -x+1$

۱۰	در شکل زیر تابع خطی f در نقطه $x = ۲$ بر نمودار تابع g مماس شده است. اگر $\lim\limits_{x\to۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = ۴$ باشد مقدار $f(۱)+g(۲)+g'(۲)$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵



$B(2, g(2))$

$A(0, 1)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 4 = \frac{g(2)-y_A}{x_B - x_A}$$ = شیب خط f

$$4 = \frac{g(2)-1}{2-0} \longrightarrow g(2)-1 = 8 \longrightarrow g(2) = 9$$

$$f(x) = mx+b \xrightarrow[A(0,1)]{m=g'(2)=4} f(x) = 4x+1$$

$$f(1)+g(2)+g'(2) = 5+9+4 = 18$$

۱۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x\le ۱\\ ۲x^۳ & x>۱\end{cases}$ را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنید.	۱/۵

بررسی پیوستگی :

$$\lim_{x\to (۱)^+} ۲x^۳ = ۲(۱)^۳ = ۲$$

→ حد راست ≠ حد چپ

$$\lim_{x\to (۱)^-} x^۲+۲ = (۱)^۲+۲ = ۳$$

تابع $f(x)$ در $x=۱$ حد ندارد . بنابراین در این نقطه

ناپیوسته و مشتق ناپذیر است .

۱۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ب) $f(x)=\frac{۲\sqrt{x}+۳}{x+۷}$ الف) $g(x)=(x^۲+۱)(۳x-۵)x^۲$	۱/۵

الف) $g(x) = (x^۲+۱)(۳x^۳-۵x^۲)$

$$g'(x) = ۲x(۳x^۳-۵x^۲) + (x^۲+۱)(۹x^۲-۱۰x)$$

ب) $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)(x+۷) - (۲\sqrt{x}+۳)}{(x+۷)^۲}$

۱۳	گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه $V=۶۰(۱-\frac{t}{۵۰})^۲$ بدست آید: الف) آهنگ تغییرمتوسط در بازه ی زمانی $[۰,۳۰]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییرلحظه ای $\frac{-۴۸}{۲۸} L/S$ است؟	۱

$V(۳۰) = ۶۰(۱-\frac{۳}{۵})^۲ = ۶۰(\frac{۴}{۲۵}) = \frac{۴۸}{۵}$ و $V(۰)=۶۰$

الف) $\dfrac{V(۳۰)-V(۰)}{۳۰-۰} = \dfrac{\frac{۴۸}{۵}-۶۰}{۳۰} = \dfrac{-۲۵۲}{۳۰}$

ب) $V' = ۶۰\times ۲(۱-\frac{t}{۵۰})(\frac{-۱}{۵۰}) = \frac{-۴۸}{۲۵} \longrightarrow t=۱۰S$

۱۴	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟	۱/۵

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		اکیدا صعودی		اکیدا نزولی		اکیدا صعودی	

اکیدا صعودی : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

اکیدا نزولی : $(-1, 1)$

۱۵	نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ را در بازه $[-1,3]$ بدست آورید.	۱/۵

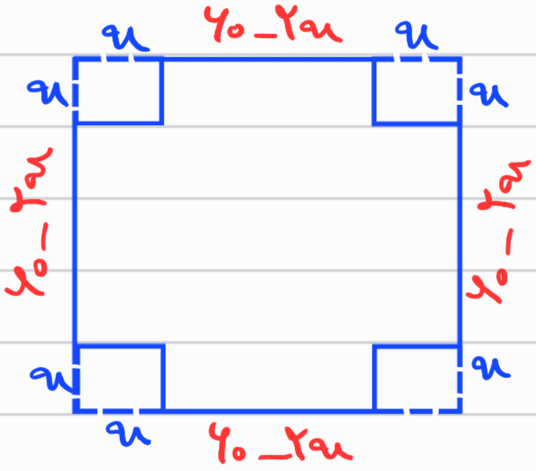
$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \longrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$$

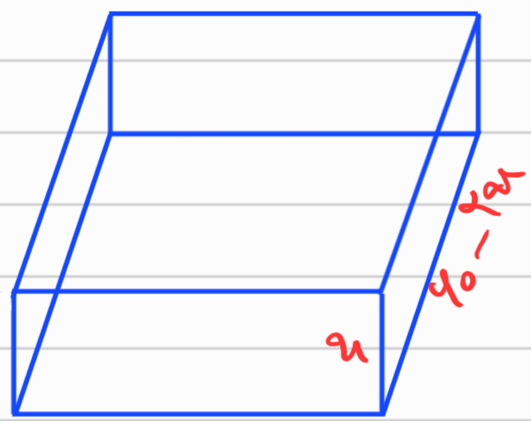
$$\longrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \checkmark \\ x^2 - 2 = 0 \longrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \ \checkmark \\ x = -\sqrt{2} \ \times \notin [-1, 3] \end{cases} \end{cases}$$

ابتدا و انتهای بازه هم جزء نقاط بحرانی هستند.

$$\boxed{\text{نقاط بحرانی} : \{-1, 0, \sqrt{2}, 3\}}$$

۱۶	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کناربگذاریم سپس لبه ی جعبه رابه اندازه ی x برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت $V = (۶۰ - ۲x)^۲x$ است . مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟	۱/۲۵





$60-2x>0 \rightarrow 2x<60 \rightarrow x<30$

$V =$ طول $\times$ عرض $\times$ ارتفاع $= (60-2x)^2 x$

$V' = 2(60-2x)(-2)x + (60-2x)^2 = 0$

$(60-2x)(-4x+60-2x) = 0 \rightarrow (60-2x)(60-6x)=0$

$\rightarrow \begin{cases} 60-2x=0 \rightarrow x=30 & \text{غ ق ق} \\ 60-6x=0 \rightarrow x=10 & \text{ق ق} \end{cases}$

Fathollahi_math

آدرس: اینستاگرام