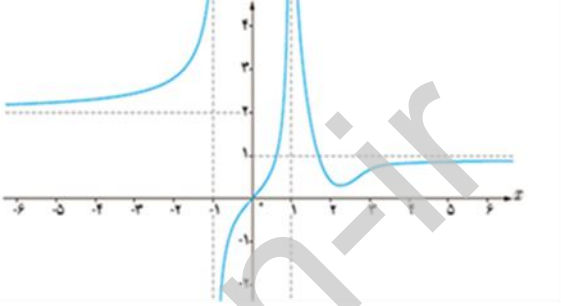


نام :	وزارت آموزش و پرورش	درس: ریاضی ۳
نام خانوادگی :	اداره کل آموزش و پرورش استان لرستان	تاریخ امتحان:
پایه: دوازدهم	امتحان شبه نهایی هماهنگ استانی	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه
رشته تجربی:	سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲	نمره :
ساعت امتحان :		

ارزش هر کس به مقدار دانایی و تخصص اوست. امام علی (ع)

بارم		
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف: باقیمانده تقسیم عبارت $x^3 + 3x - 2$ بر $x - 1$ برابر ۳ است.</p> <p>ب: تابع $y = \tan x$ در دامنه خود اکیدا صعودی است.</p> <p>پ: نقطه $(0, 0)$ نقطه ی بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ می باشد.</p> <p>ت: اگر $f(x) = 2x - 1$ در این صورت $f^{-1}(3)$ برابر ۲ است.</p>	۱
۱	<p>جای خالی عبارت مناسب بنویسید</p> <p>الف: بازه $(-2, 8)$ دارای مرکز و شعاع می باشد</p> <p>ب: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$ برابر است</p> <p>ب: دوره تناوب تابع $y = \sin 2x$ برابر است.</p>	۲
۱	<p>تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی که در آن تابع صعودی، نزولی و ثابت است را مشخص کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$	۳
۱	<p>اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ آنگاه دامنه و ضابطه ی $f \circ g$ را بیابید.</p>	۴
۱	<p>مقدار عددی $\sin 22/5$ را محاسبه کنید.</p>	۵
۱	<p>جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$ را بیابید.</p>	۶

۱	<p>با توجه به نمودار تابع داده شده ، موارد خواسته شده را بیابید</p> <p>الف $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$</p> <p>پ $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$</p> <p>پ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$</p> <p>ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$</p> 	۷
۱	<p>حدود توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$</p>	۸
۱/۵	<p>مشتق پذیری تابع $f(x) = x[x]$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. با ذکر دلیل بگویید آیا این نقطه می تواند مینیمم نسبی تابع باشد.</p>	۹
۱	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^3 - 4t + 1$ در بازه $[0, 3]$ t بر حسب ثانیه داده شده است.</p> <p>الف) سرعت متوسط در این بازه را به دست آورید.</p> <p>ب) در چه زمانی سرعت متوسط و سرعت لحظه ای برابر می شوند.</p>	۱۰
۱	<p>مشتق تابع $f(x) = (a+b-1)x^2 + (a-b-2)x + a$ همواره برابر صفر است مقادیر a, b و ضابطه تابع را بیابید.</p>	۱۱
۱/۵	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن الزامی نیست)</p> <p>$f(x) = (x^2 - 3x)^3$</p> <p>$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$</p>	۱۲

۱/۵	مقادیر a, b را طوری به دست آورید که تابع $y = ax^3 + bx + 2$ در نقطه $(1, 3)$ دارای ماکزیمم نسبی باشد.	۱۳
۱	محیط مستطیلی ۲۰ سانتی متر می باشد، ماکزیمم مساحت آن را به دست آورید.	۱۴
۲	وضعیت خط $3x + 4y - 1 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ را مشخص کنید.	۱۵
۱/۵	در یک بیضی مختصات رئوس دو سر قطر بزرگ $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\bar{A} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ می باشد، اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{2}$ باشد، مختصات مرکز، فاصله کانونی و طول قطرهای بزرگ و کوچک را به دست آورید.	۱۶
۱	سه ظرف یکسان داریم، ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی، ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی و تمام مهره های ظرف سوم آبی می باشند، ظرفی را به تصادف انتخاب و از آن مهره ای بیرون می آوریم با چه احتمالی مهره انتخاب شده آبی می باشند. (پاسخ به این سوال اختیاری است)	۱۷
۲۰	جمع بارم	

الف) $+\infty$ ب) $-\infty$ ج) $\frac{1}{2}$ د) 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1^x]}{x-1} = \frac{1}{\text{منفی}} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n} \times \frac{\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2k}{2k(\sqrt{n+1} + 1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g[0^-]}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g[0^+]}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

همه مشتق‌ها با مشتق است در نظر $m=2$ برای نسبت $\frac{0}{0}$ در این نقطه مشتق پذیر نیست.

همه $f(x)$ برای $x < 0$ منفی و برای $x > 0$ نیز مثبت است پس نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد.

$$V_{avg} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(3^3 - f_{2,3} + 1) - (0^3 - f_{2,0} + 1)}{3 - 0} \quad (الف)$$

$$V_{avg} = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}$$

بازمان است که مشتق تابع برابر 5 m/s شود

$$f'(t) = 3t^2 - 4 = 5 \rightarrow 3t^2 = 9 \rightarrow t^2 = 3 \rightarrow \boxed{t = \sqrt{3}}$$

$$f'(x) = r(a+b-1)x + (a-b-r) = 0 \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} x(a+b-1) &= 0 & (11) \\ a-b-r &= 0 & (12) \end{aligned} \right\} (11) \rightarrow ra = r \rightarrow \boxed{x = \frac{r}{r}} \quad (13)$$

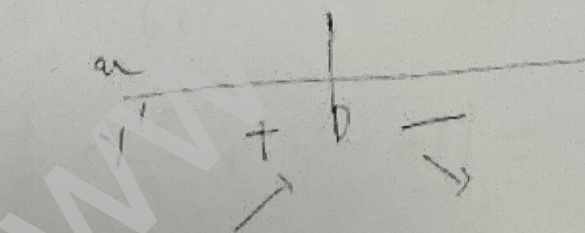
$$(12) \xrightarrow{(13)} \frac{r}{r} - b - r = 0 \rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{r}}$$

$$f(x) = a \xrightarrow{(13)} \boxed{f(x) = \frac{r}{r}}$$

$$f'(x) = r(x^2 - r)(x^r - rx)^r \quad (14)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{+x(x-1) - (x(x+1))}{(x-1)^r}}{r \sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^r}}$$

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1)^r + b(1) + r - a - b = 1 \\ r' = 0 \rightarrow 0 &= r(x)(1)^r + b \rightarrow b = -ra \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= -\frac{1}{r} \\ b &= \frac{r}{r} \end{aligned} \quad (15)$$



$$r(a+b) = r_0 \rightarrow a+b = l_0 \rightarrow a = l_0 - b \quad (16)$$

$$S = ab = (l_0 - b)b = -b^2 + l_0 b$$

$$S' = 0 \rightarrow -2b + l_0 = 0 \rightarrow b = \frac{l_0}{2}$$

$$\boxed{S_{max} = \frac{l_0}{2} \left(l_0 - \frac{l_0}{2} \right) = \frac{r_0}{4}}$$

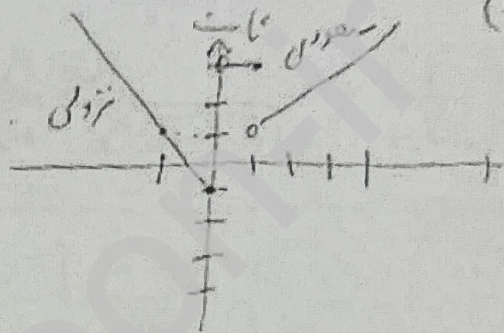
b	l_0	δ	l_0
$S(b) = -rb + l_0 b$	$+$	$+$	$-$
$S(b) = -b^2 + l_0 b$	\nearrow	0	$- 0$

الف) نامرست	ب) نامرست	ج) مرست	د) مرست
(۲)	(۲)	(۲)	(۲)
الف) ۵, ۳	ب) ۲	ج) ۲	د) ۲

$$x \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow f(x) = -1 \\ x=-1 \rightarrow f(x) = 1 \end{cases}$$

$$0 < x \leq 1 \rightarrow f(x) = 2$$

$$x > 1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow f(x) = 1 \\ x=2 \rightarrow f(x) = 2 \end{cases}$$



$(-\infty, 0] \rightarrow$ منفی $(0, 1] \rightarrow$ مثبت $(1, +\infty) =$ منفی

$$f(g(x)) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} \rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D(f \circ g) = [2, +\infty) - \{1\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \\ x = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \sin(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \beta}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2 \cdot \sqrt{2}}} \quad (d)$$

$$\sin(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \rightarrow \boxed{\sin(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$(c) \sin \alpha - \sin \alpha - 1 = 0 \rightarrow -\sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin \alpha = \sin^2 \alpha \quad (e)$$

$$\sin \alpha = 0 \rightarrow \boxed{x = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}}$$

$$\sin \alpha \neq 0, \sin \alpha = 1 \rightarrow \boxed{x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \quad K \in \mathbb{Z}} \quad \cup \quad x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - 2ax + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 \quad (18)$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{شعاع: } 1 \quad \text{مرکز: } (1,1)$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d > r \rightarrow$$

خط مماس ندارد

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$r_a = r \rightarrow a = 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{c}{a} \rightarrow c = \frac{1}{r}$$

$$b^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{r}{r} \rightarrow b = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\boxed{\text{قطر عمود = } r \quad \text{قطر مورب = } \sqrt{r}}$$

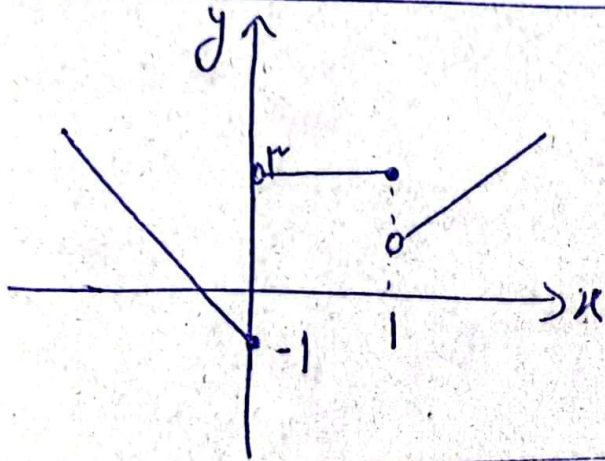
$$\boxed{r \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$P_{\text{دایره}} = \frac{1}{r} \times \frac{\binom{r}{1}}{\binom{r}{1}} + \frac{1}{r} \times \frac{\binom{r}{2}}{\binom{r}{1}} + \frac{1}{r}$$

$$P_{\text{دایره}} = \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r} + \frac{r}{1} + 1 \right) = \frac{r \times 1 + r \times r + 1}{r \times 1} = \boxed{\frac{1+r^2}{r} = \sqrt{r}}$$

سؤال (۱) الف) نادرست ب) نادرست ج) درست د) درست

سؤال (۲) الف) مرکز = ۳ و شعاع = ۵ ب) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ج) $\omega = 2$ د) $\omega = 1$



سؤال (۳) $محدوده = [0, 1]$

$محدوده = [1, +\infty)$

$محدوده = (-\infty, 0]$

سؤال (۴) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ $y = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x-2}) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-1}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $D_g = x \geq 2$

$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \geq 2, \sqrt{x-2} \neq 1\}$
 $\rightarrow D_{f \circ g} = [2, +\infty) - \{3\}$ $x \neq 3$

سؤال (۵) $\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sin \alpha$ $\rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

سؤال (۶) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
 $\rightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$
 $\left\{ \begin{aligned} \sin x = -\frac{1}{2} &\rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right.$

$$الف) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

(7) سؤال

$$ج) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$د) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(8) سؤال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{0}{0} \text{ فرم } \xrightarrow{\text{عق. بول}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x \times 0 = 0$$

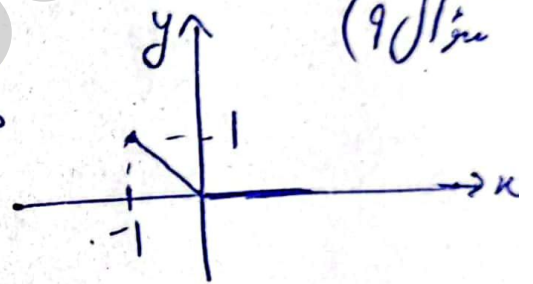
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x \times (-1) = 0 \times (-1) = 0 \xrightarrow{\text{مشتق } f}$$

$$f(0) = 0 \times [0] = 0$$

$$f'_+(0) = 0$$

$$f'_-(0) = x \times [0^-] = (-x)' = -1$$

$\rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \rightarrow$ تابع f در $x=0$ مشتق نپذیرد نسبت



(9) سؤال

$$الف) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - (1)}{x} = \frac{1}{x} = 0$$

(10) سؤال

$$ب) f(t) = \sqrt{t^2 - 9} = 0 \rightarrow t^2 - 9 = 0 \rightarrow t^2 = 9 \rightarrow t = \pm 3$$

$$x^2 \text{ ضریب } = 0 \rightarrow a + b - 1 = 0 \rightarrow a + b = 1$$

$$x \text{ ضریب } = 0 \rightarrow a - b - 2 = 0 \rightarrow a - b = 2$$

$$f(x) = \frac{x}{y} \rightarrow \text{نقطه} \quad \begin{cases} 2a = 3 \\ a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(11) سؤال

مشتق تابع f با مشتق f با مشتق

$$f(x) = x(x^2 - 1)^2 x(x - 1)$$

$$g(x) = \frac{1x(x-1) - 1x(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1x^2 - x - x^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{-2x}{(x-1)^2}$$

$$y(1) = 1 \rightarrow a + b + 1 = 1 \rightarrow a + b = 0 \quad \text{①}$$

$$y'(1) = 0 \rightarrow 1a + b = 0 \rightarrow b = -1a \quad \text{②}$$

$$\text{① و ②} \rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \rightarrow a - 1a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ b = -1a \rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x y $2xy = 2(x+y) = 2$ سؤال (14)

$$\rightarrow x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

$$S = xy = x(1-x) = -x^2 + 10x$$

$$\rightarrow S' = -2x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S = 5 \times 0 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{مركز} = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 1) \\ \text{نصف قطر} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4} = 1 \end{cases} \quad \text{سؤال (15)}$$

فاصلی مرکز تا خط $d = \frac{|2x + 2y - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{6}{5} > \text{نصف قطر} = 1$

خط بیرون دایره قرار دارد

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{بعضی از نوع افقی}$$

$$2a = 2 \rightarrow a = 1, e = \frac{1}{2} \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

فاصلی تا بیضی $= 2c = 2(\frac{1}{2}) = 1$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{3}$

فاصلی مرکز تا بیضی $= 2a = 2$ $\text{فاصلی مرکز تا بیضی} = 2b = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$