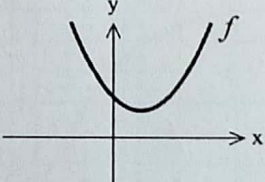

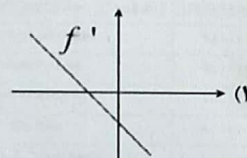
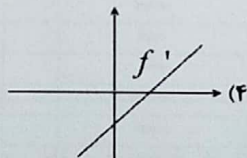
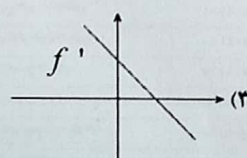


سوالات شبه نهایی درس: ریاضی ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳	تعداد صفحه: ۳
دانش آموزان روزانه سراسر استان چهارمحال و بختیاری در نوبت اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲			

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.	نمره
------	---	------

۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر دامنه تابع <math>f</math> بازه <math>[-1, 3]</math> باشد، دامنه تابع <math>g(x) = 1 - 3f(2x - 1)</math> برابر <math>[-3, 5]</math> است.</p> <p>ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای آن، همواره صعودی است.</p> <p>پ) مجموعه‌ی اعداد اصم و مجموعه‌ی اعداد گویا یک افزاز روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.</p>	۰/۷۵
۲	<p>در هر یک از موارد زیر گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) تابع <math>f(x) =  x^3 </math> با دامنه <math>R</math> چگونه است؟</p> <p>(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک به یک</p> <p>ب) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - [x]}{x - 1}</math> کدام است.</p> <p>(۱) ۱ (۲) صفر (۳) <math>+\infty</math> (۴) <math>-\infty</math></p> <p>پ) اگر <math>f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 2x - 4)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}}</math> باشد، مقدار مشتق تابع <math>f</math> در نقطه <math>x = 1</math> برابر ..... است.</p> <p>(۱) <math>\frac{2}{3}</math> (۲) <math>-\frac{2}{3}</math> (۳) <math>\frac{5}{3}</math> (۴) <math>-\frac{5}{3}</math></p> <p>ت) با توجه به نمودار تابع <math>f</math>، نمودار <math>f'</math> کدام گزینه می‌تواند باشد.</p>     	۱
۳	<p>در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.</p> <p>الف) تابعی مانند <math>f(x) = \dots</math> با دامنه <math>R</math> تابعی است که هر نقطه‌ی دلخواه از <math>D_f</math>، یک نقطه بحرانی <math>f</math> است.</p> <p>ب) اگر <math>\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{2}{5}</math> باشد، مقدار <math>\cos 2x</math> برابر ..... است.</p> <p>پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه برابر ..... است.</p> <p>ت) دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم تاس سفید ۴ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد برابر است با .....</p>	۱
«ادامه سوالات در صفحه دوم»		

سوالات شبه نهایی درس: ریاضی ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳	تعداد صفحه: ۳
دانش آموزان روزانه سراسر استان چهارمحال و بختیاری در نوبت اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲			معاونت آموزش متوسطه

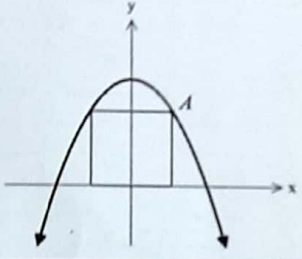
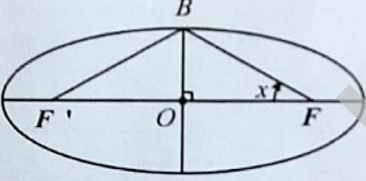
ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.	نمره
------	---	------

۴	اگر $f(x) = \frac{x-1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، آنگاه: الف) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید. ب) مقدار $g \circ f(-1)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۵	الف) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $y = 4\sin^3 x \cos x + 4\sin x \cos^3 x - 2$ را به دست آورید. ب) معادله مثلثاتی $\cos 2x + 3\sin x = 2$ را حل کنید.	۱/۲۵
۶	الف) مقدار $a$ و $b$ را طوری بیابید که: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^3 - x} = -\frac{2}{3}$ ب) حد تابع زیر را بدست آورید. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$	۱/۲۵
۷	نمودار تابع $f$ به صورت زیر رسم شده است. اگر خط $d$ در نقطه $A$ بر نمودار تابع $f$ مماس باشد: الف) حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ را بیابید. ب) مختصات نقطه $B$ را بدست آورید.	۱
۸	تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x \geq 1 \\ 3\sqrt{x} - b & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. مقادیر $a$ و $b$ را طوری بدست آورید که تابع $f$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر باشد.	۱/۲۵
۹	مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (\sqrt{x-1})(x-2)(x+2)$ ب) $f(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2-2}\right)^4$	۲
۱۰	معادله حرکت متحرکی $f(t) = 100\sqrt{t} + 5t$ می‌باشد. سرعت متوسط این متحرک در بازه‌ی زمانی $[1, 9]$ را بدست آورید.	۰/۷۵

«ادامه سوالات در صفحه سوم»

سوالات شبه نهایی درس: ریاضی ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳	تعداد صفحه: ۳
دانش آموزان روزانه سراسر استان چهارمحال و بختیاری در نوبت اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲		معاونت آموزش متوسطه	

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.	نمره
------	---	------

۱۱	ماکزیمم نسبی نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 24x + k$ روی خط $y = -8x + 1$ قرار دارد. مقدار $k$ را بدست آورید.	۱/۵
۱۲	از نقطه $A$ روی منحنی تابع $f(x) = 5 - x^2$ دو خط موازی محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا مستطیلی به شکل مقابل ایجاد شود. بیشترین مساحت این مستطیل را پیدا کنید.	۱
		
۱۳	الف) فاصله‌ی مرکز دایره‌ی $C(O, x^2 + 1)$ تا خط $d$ برابر ۵ است. به ازای چه مقدار $x$ خط $d$ نسبت به دایره قاطع است. ب) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, 1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ مماس درون باشد.	۱/۲۵
۱۴	در بیضی مقابل اگر $\sin x = \frac{1}{3}$ باشد، محیط مثلث $BFF'$ چند برابر قطر کوچک بیضی است. ( $F'$ و $F$ کانون‌ها و $O$ مرکز بیضی است.)	۱/۵
		
۱۵	مدرسه‌ی $A$ سه برابر مدرسه‌ی $B$ دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی $A$ و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی $B$ معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه‌ی دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم. با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟	۱/۵
۲۰	جمع نمرات	"موفق و سربلند باشید."

# نبرد فتح المصحف

# پاسخ از :

# بنام خدا

۰/۷۵	<p>۱ درست‌ی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر دامنه تابع <math>f</math> بازه <math>[-1, 3]</math> باشد، دامنه تابع <math>g(x) = 1 - 3f(2x - 1)</math> برابر <math>[-3, 5]</math> است.</p> <p>ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای آن، همواره صعودی است.</p> <p>پ) مجموعه‌ی اعداد اصم و مجموعه‌ی اعداد گویا یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.</p>
------	--

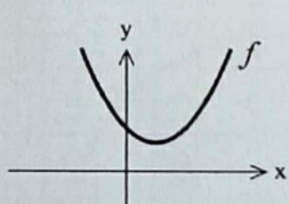
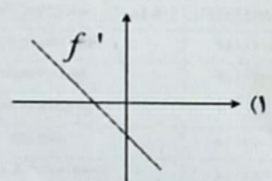
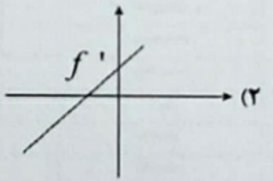
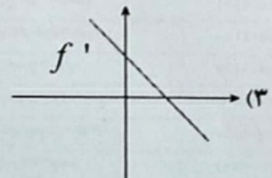
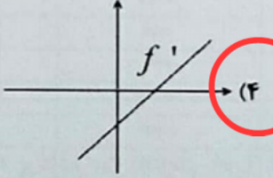
الف) نادرست  $y = f(x) \rightarrow D_f = [-1, 3] = F$  ورودی

$$-1 \leq 2x - 1 < 3 \rightarrow 0 \leq 2x < 4 \rightarrow 0 \leq x < 2$$

$D_g = [0, 2]$  ←

ب) درست

پ) درست

۱	<p>در هر یک از موارد زیر گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) تابع با ضابطه‌ی <math>f(x) =  x^3 </math> با دامنه‌ی <math>R</math> چگونه است؟</p> <p>(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک به یک</p> <p>ب) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - [x]}{x - 1}</math> کدام است.</p> <p>(۱) ۱ (۲) صفر (۳) <math>+\infty</math> (۴) <math>-\infty</math></p> <p>پ) اگر <math>f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 2x - 4)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}}</math> باشد، مقدار مشتق تابع <math>f</math> در نقطه <math>x = 1</math> برابر ..... است.</p> <p>(۱) <math>\frac{2}{3}</math> (۲) <math>-\frac{2}{3}</math> (۳) <math>\frac{5}{3}</math> (۴) <math>-\frac{5}{3}</math></p> <p>ت) با توجه به نمودار تابع <math>f</math>، نمودار <math>f'</math> کدام گزینه می‌تواند باشد.</p>	۲
		
		
		

۱	<p>در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.</p> <p>الف) تابعی مانند <math>f(x) = \dots</math> با دامنه <math>R</math> تابعی است که هر نقطه‌ی دلخواه از <math>D_f</math>، یک نقطه بحرانی <math>f</math> است.</p> <p>ب) اگر <math>\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{2}{5}</math> باشد، مقدار <math>\cos 2x</math> برابر <math>\frac{2}{5}</math> است.</p> <p>پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه برابر <math>\frac{3}{4}</math> است.</p> <p>ت) دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم تاس سفید ۴ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد برابر است با <math>\frac{1}{32}</math>.</p>	۳
---	--	---

۱/۵	<p>اگر <math>f(x) = \frac{x-1}{x}</math> و <math>g(x) = \sqrt{x-1}</math> باشد، آنگاه:</p> <p>الف) دامنه‌ی تابع <math>f \circ g</math> را با استفاده از تعریف بدست آورید.</p> <p>ب) مقدار <math>g \circ f(-1)</math> را محاسبه کنید.</p>	۴
-----	--	---

$$D_f: \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g: x \geq 1 \quad (\text{الف})$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ \underbrace{x \in [1, +\infty)}_A \mid \underbrace{\sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}}_B \right\}$$

$$\sqrt{x-1} \neq 0 \rightarrow x > 1$$

$$D_{f \circ g} = A \cap B = x > 1$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = \sqrt{2-1} = 1 \quad (\text{ب})$$

$$f(-1) = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

$$y = 4\sin x \cos x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}) - 2 \quad \text{الف)}$$

$$y = 4\sin x \cos x - 2 = 2\sin 2x - 2 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\cos 2x + 3\sin x = 2 \quad \text{ب)}$$

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2 \rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^a}{bx^b} = -\frac{2}{3} \quad \text{الف)}$$

$$\rightarrow b = 2 \rightarrow \frac{a}{4} = -\frac{2}{3} \rightarrow a = -\frac{8}{3}$$

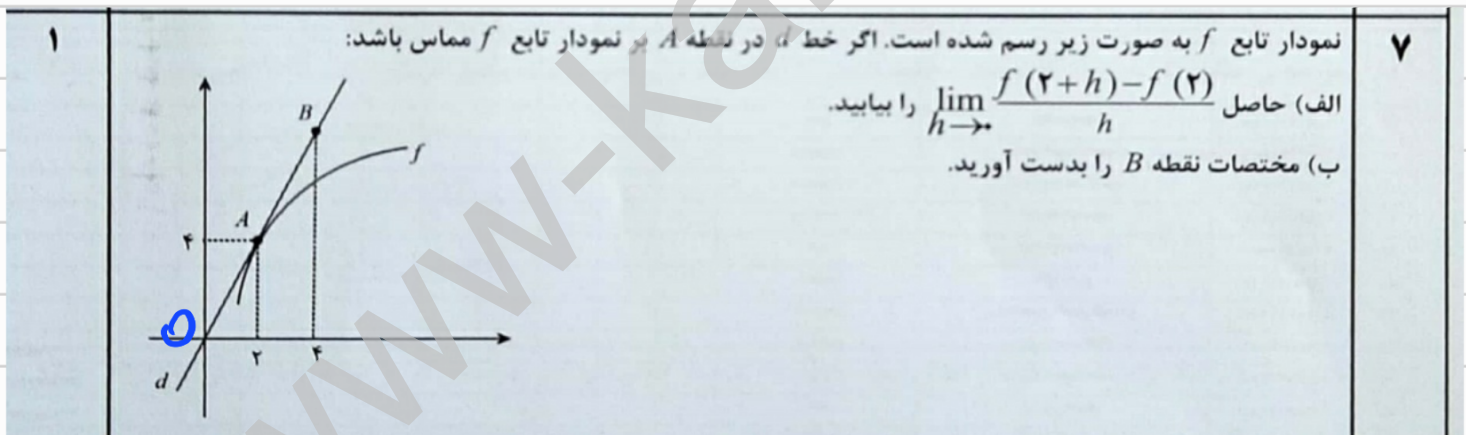
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{ب)}$$

پس:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 + x - 4)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{3}{2(2+2)} = \frac{3}{8}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) \quad \text{الف)}$$

$$A(2, 2) \text{ , } 0/0 \rightarrow m_d = \frac{2-0}{2-0} = 2 = f'(2)$$

دستگاه:  $y = 2x \rightarrow x_B = 2 \rightarrow y_B = 4$

$$B(2, 4) \quad \text{ب)}$$

بررسی پیوستگی :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + 2x = a + 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2\sqrt{x} - b = 2 - b$$

$$\rightarrow a + 2 = 2 - b$$

$$a + b = 1$$

بررسی مشتق :

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 2 & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = 2a + 2$$

$$f'_-(1) = 1$$

$$\rightarrow 2a + 2 = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = 1 \rightarrow b = \frac{3}{2}$$



الف)  $f(x) = (\sqrt{x-1})(x-2)(x+2)$

ب)  $f(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2-2}\right)^4$

$$F(u) = \sqrt{u-1} (u^2 - 2) \quad \text{الف)}$$

$$F'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u-1}} (u^2 - 2) + 2u \sqrt{u-1}$$

$$F(u) = \left(\frac{3u-2}{u^2-2}\right)^4 \quad \text{ب)}$$

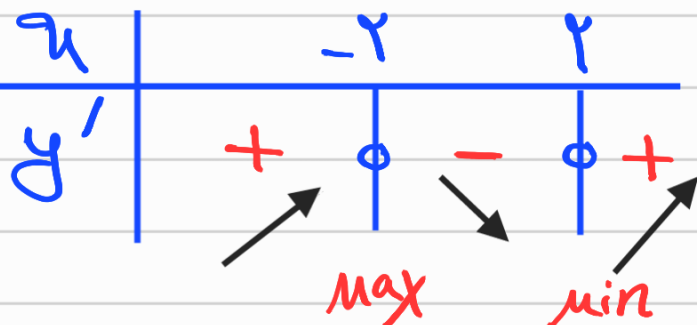
$$F'(u) = 4 \left(\frac{3u-2}{u^2-2}\right)^3 \left(\frac{3(u^2-2) - 2u(3u-2)}{(u^2-2)^2}\right)$$

۱۰. معادله حرکت متحرکی  $f(t) = 100\sqrt{t} + 5t$  می‌باشد. سرعت متوسط این متحرک در بازه‌ی زمانی  $[1, 9]$  را بدست آورید.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{F(9) - F(1)}{9 - 1} = \frac{(300 + 45) - (100 + 5)}{8} = \frac{240}{8} = 30$$

در بازه  $[1, 9]$

$$f'(x) = 4x - 24 = 0 \rightarrow x = \pm 6$$

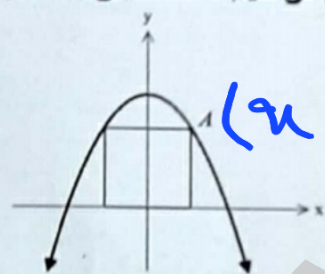


$$\max(-6, 36 + k)$$

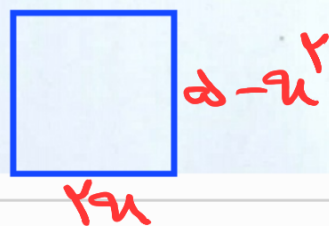
$$y = -8x + 1 \rightarrow 36 + k = -8(-6) + 1$$

$$36 + k = 49 \rightarrow k = 13$$

از نقطه  $A$  روی منحنی تابع  $f(x) = 5 - x^2$  دو خط موازی محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا مستطیلی به شکل



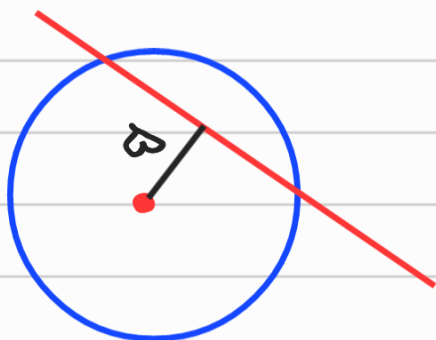
مقابل ایجاد شود. بیشترین مساحت این مستطیل را پیدا کنید.



$$S = x(5 - x^2) = 5x - x^3$$

$$S' = 5 - 3x^2 = 0 \quad x^2 = \frac{5}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$S_{\max} = x(5 - x^2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \left( 5 - \frac{5}{3} \right) = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$



$$\text{الف) } d < r \rightarrow x^2 > 2$$

$$\hookrightarrow |x| > \sqrt{2} \rightarrow x > \sqrt{2} \cup x < -\sqrt{2}$$

ب)

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 14$$

$$\text{مرکز } (2, -3)$$

$$r' = \sqrt{14}$$

$$\text{مس درون: } 0 \leq |r - r'|$$

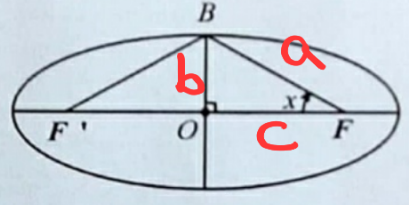
$$O(-1, 1) \rightarrow OO' = \sqrt{9 + 14} = 5$$

$$O'(2, -3)$$

$$5 = |r - r'| \rightarrow |r - \sqrt{14}| = 5 \rightarrow r = 9$$

$$\text{معادله دایره } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

۱/۵ در بیضی مقابل اگر  $\sin X = \frac{1}{3}$  باشد، محیط مثلث  $BFF'$  چند برابر قطر کوچک بیضی است. ( $F'$  و  $F$  کانون‌ها و  $O$  مرکز بیضی است.)



$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 3b$$

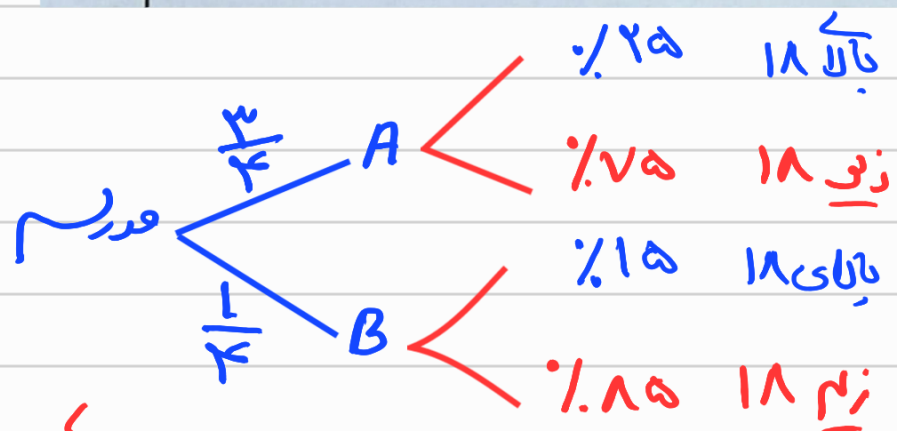
$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9b^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 8b^2$$

$$c = 2\sqrt{2}b$$

$$\begin{aligned} \text{محیط } \triangle BFF' &= a + a + c + c = 2a + 2c \\ &= 2b + 2(2\sqrt{2})b = (2 + 4\sqrt{2})b \end{aligned}$$

$$\frac{\text{محیط } \triangle BFF'}{\text{قطر کوچک}} = \frac{(2 + 4\sqrt{2})b}{2b} = 1 + 2\sqrt{2}$$

۱/۵ مدرسه‌ی A سه برابر مدرسه‌ی B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه‌ی دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم. با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟



$$\text{احتمال معدل بالای ۱۸} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{25}{100}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{15}{100}\right) = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$