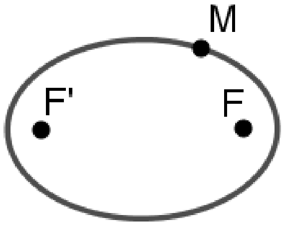
سؤالات شبه نهایی درس : هندسه (۳)	بسمه تعالی	تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۱/۲۲
پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	آموزش و پرورش استان کرمانشاه	زمان امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	تعداد صفحات : ۲ صفحه
دانش آموزان سراسر استان در فروردین ۱۴۰۲	(نوبت صبح)	تعداد سؤالات: ۱۶

امام علی (ع) فرمود: کسی که با دانش خود به پیکار با جهلِ خویش برخیزد، به بالاترین خوشبختی می رسد.

ردیف	سؤالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی هر یک عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف) نقطه $(3,-2,0)$ روی صفحه xoy قرار دارد.** **ب) اگر $A^2=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^2=I+3A$.**	۰/۵
۲	**جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.** **الف) بیضی مکان هندسی نقطه هایی از صفحه است که .... فاصله هایشان از دو نقطه ثابت در آن صفحه یک مقدار ثابت است.** **ب) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ....**	۰/۵
۳	**با استفاده از روش ساروس، دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	۱
۴	**اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & 1 \end{bmatrix}$ و $A\times B$ ماتریسی قطری باشد، x و y را بیابید.**	۱/۵
۵	**ماتریس مربعی از مرتبه ۳ مشخص کنید به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} 2i-j & i\le j \\ 2j-i & i>j \end{cases}$.**	۱
۶	**معادله دایره ای را بنویسید که نقطه های $A(4,-1)$ و $B(-2,1)$ دو سر قطری از آن باشند.**	۱/۵
۷	**نقطه های A، B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید.)**	۱/۵
۸	**اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.**	۱/۵
۹	**معادله سهمی به رأس $A(2,1)$ و کانون $F(2,5)$ را به دست آورده و معادله خط هادی آن را بنویسید.**	۱/۵

ادامه سؤالات در صفحه دوم

ردیف	سؤالات	بارم
۱۰	در شکل زیر، نقطه M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$ 	۱/۷۵
۱۱	نقطه های $A=(-۱,۲,۳)$، $B=(-۲,۴,۱)$ و $C=(۱,۳,۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) کسینوس زاویه A از مثلث ABC را حساب کنید. ب) مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.	۱/۵
۱۲	اگر $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$ باشند، طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورید.	۱
۱۳	اگر $\|a\|=\|b\|$، $\|a-b\|=۲\sqrt{۳}$ و $\|a+b\|=۶$ باشند، زاویه بین دو بردار a و b را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	برای بردارهای a و b ثابت کنید: $\|a+b\| \le \|a\|+\|b\|$.	۱/۵
۱۵	اگر $a+b=(۲,۳,۴)$ و $a=i+۲j-۳k$ باشد، بردار b را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	اگر i، j و k بردارهای واحد باشند، حاصل عبارت روبرو را به دست آورید. $(i+j-k)\times(i-j)$	۰/۷۵
	سربلندی شما آرزوی ماست. جمع بارم	۲۰نمره

پاسخ‌نامه هندسه ۳ — نوبت صبح

① الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)

② الف) عمود (۰/۲۵) ب) ندارد (۰/۲۵)

③

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\4&2&0\end{bmatrix}\begin{matrix}2&0\\3&-1\\4&2\end{matrix} \Rightarrow |A|=(\underbrace{0+0+6}_{0/25})-(\underbrace{-4+0+4}_{0/25})=6 \quad (0/25)$$

④

$$A\times B=\begin{bmatrix}3&-2\\2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&x\\2y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4y&3x-2\\2+2y&2x+1\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underbrace{3x-2=0\Rightarrow x=\tfrac{2}{3}}_{0/25} \quad \text{و} \quad \underbrace{2+2y=0\Rightarrow y=-1}_{0/25}$$

⑤

$$A_{3\times3}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}}_{0/25}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix} \quad (0/75)$$

⑥ مرکز دایره وسط پاره خط AB است. (۰/۲۵)

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10} \quad (0/25)$$

$$O=\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(1,0) \quad (0/25)$$

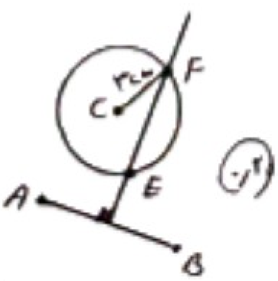
$$R=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10} \quad (0/25)$$

معادله دایره: $(x-1)^2+y^2=10$ (۰/۵)

⑦ اگر بخواهیم نقاط از A و B به یک فاصله باشند؛ باید روی عمود منصف پاره خط AB قرار داشته باشند و همچنین اگر بخواهیم نقاط از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند باید روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳cm واقع شوند. پس: (۰/۲۵)

طرز رسم: عمود منصف پاره خط AB را رسم کرده و دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳cm رسم می‌کنیم، محل برخورد دایره با عمود منصف AB جواب مسئله است. (۰/۵)

بحث: ۱- هرگاه عمود منصف دایره را در دو نقطه قطع کند، مسئله دو جواب دارد.
۲- هرگاه عمود منصف بر دایره مماس شود، مسئله یک جواب دارد.
۳- هرگاه عمود منصف دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



(۰/۲)

E و F جواب‌های مسئله‌اند.

(۰/۲۵)

E جواب مسئله است

(۰/۲۵)

مسئله جواب ندارد.

۸)

$\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow c=\frac{3}{5}a$ و $2b=16 \Rightarrow b=8 \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2=64+\frac{9}{25}a^2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Longrightarrow a^2=100 \Rightarrow a=10 \Rightarrow 2a=20$ طول قطر بزرگ و $c=\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}(10)=6 \Rightarrow 2c=12$ فاصله کانونی (۰/۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

---

۹) شاخه‌های سهمی رو به بالاست.

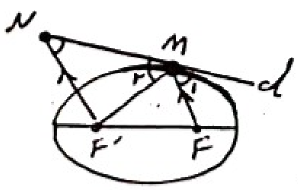
$A=(h,k)=(2,1) \Rightarrow h=2, k=1$ (۰/۲۵)

$F=(h,a+k)=(2,5) \Rightarrow \begin{cases} h=2 & (۰/۲۵) \\ a+k=5 \rightarrow a+1=5 \rightarrow a=4 & (۰/۲۵) \end{cases}$ (۰/۲۵)

معادله خط هادی: $y=-a+k \rightarrow y=-4+1 \rightarrow y=-3$ (۰/۲۵) ، معادله سهمی: $(x-2)^2=16(y-1)$ (۰/۲۵)

---

۱۰) بنابه ویژگی بازتابندگی در بیضی $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ می‌باشد، داریم: (۰/۲۵)



(۰/۵)

$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_1=\hat{M}_2 \\ MF \parallel NF' \text{ و مورب } MN \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}=\hat{M}_2 \Rightarrow NF'=MF'$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(۰/۵)

---

۱۱)

الف) $\overrightarrow{AB}=(-2-(-1), 4-2, 1-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$ (۰/۲۵)

$\overrightarrow{AC}=(1-(-1), 3-2, 5-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(2,1,2)$ (۰/۲۵)

$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+2-4}{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{4+1+4}}=-\frac{4}{9}$ (۰/۵)

ب) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6i-2j-5k$ ، $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{65}$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

---

۱۲) ابتدا مختصات $\vec{a}+\vec{b}$ را حساب کرده و سپس طول آن را به دست می‌آوریم: (۰/۲۵)

$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j} \Rightarrow \vec{a}=(1,1,0)$

$\vec{b}=\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \vec{b}=(0,1,-1)$ (۰/۲۵)

$\Longrightarrow \vec{a}+\vec{b}=(1,2,-1)$ (۰/۲۵) ، $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ (۰/۲۵)

---

۱۳)

$|a+b|^2-|a-b|^2=4a.b=36-12=24 \longrightarrow a.b=6$ (۰/۵)

$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2a.b \xrightarrow{|a|=|b|} |a|=|b|=2\sqrt{3}$ (۰/۵)

$\cos\theta=\frac{a.b}{|a|.|b|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^\circ$ (۰/۵)

۱۴) اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta$ (۰/۲۵)

$\cos\theta \le 1 \xrightarrow{\times 2|a||b|} 2|a||b|\cos\theta \le 2|a||b|$ (۰/۵)

$\Rightarrow |a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta \le |a|^2+|b|^2+2|a||b| \Rightarrow |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2 \Rightarrow |a+b| \le |a|+|b|$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

---

۱۵) $\vec{a}+\vec{b}=(2,3,4)=\vec{c}$ (۰/۲۵) , $\vec{a}=i+2j-3k=(1,2,-3)$ (۰/۵) $\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$ (۰/۲۵) $=(1,1,7)$ (۰/۵)

---

۱۶) $(i+j-k)\times(i-j) = i\times i - i\times j + j\times i - j\times j - k\times i + k\times j$ (۰/۲۵) $= -k-k-j-i =$ (۰/۲۵)

$= -2k-j-i$ (۰/۲۵)