آزمون درس: هندسه (۳)
پایه: دوازدهم
رشته: ریاضی و فیزیک

به نام آنکه جان را فکرت آموخت
اداره کل آموزش‌وپرورش استان کهگیلویه و بویراحمد
معاونت آموزش متوسطه
آزمون شبه نهایی
فروردین ماه ۱۴۰۲

تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۰۴
مدّت امتحان: ۱۰۰ دقیقه
ساعت شروع: ۱۰ صبح
تعداد سؤالات: ۱۴ سؤال

((الا بذکر الله تطمئن القلوب)) – همانا با یاد خداوند دلها آرام می گیرد.
تعداد صفحات: ۲

ردیف	((متن سوالات)) نوبت صبح صفحه: ۱	بارم
۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) وارون هر ماتریس در صورت وجود .... است. ب) نقطه ی $A(1,-2)$ در .... دایره به معادله $x^2+y^2-2x+2y=0$ قرار دارد. (داخل/ خارج) ج) در حالتی که خروج از مرکز بیضی .... باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. د) اگر سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر .... است.	۱
۲	**ماتریس های $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ به صورت های زیر تعریف شده اند. حاصل $2A-3B$ را بدست آورید.** $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i<j \\ 1 & i=j \\ j-i & i>j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=Max\{i,j\}$	۱/۲۵
۳	الف) اگر $B=[b_{ij}]_{3\times3}$, $b_{ij}=\begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i<j \\ 1 & i>j \end{cases}$. ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس B^2+3I را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه ۳ است)	۱/۵
۴	الف) اگر $\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{pmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. ب) دترمینان ماتریس $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ را بیابید	۱/۵
۵	دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۲۵
۶	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(2,-2)$ و بر خط $4x-6y+4=0$ مماس باشد	۱
۷	وضعیت خط $4x-6y=0$ را نسبت به دایره ی $x^2+y^2-2x=3$ مشخص کنید	۱/۵

۸	وضعیت دو دایره ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x=۸۰$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۹	در نقطه ی $A(۳,۴)$ روی دایره ی $x^{۲}+y^{۲}-۴x-۴y-۳=۰$ مماس بر آن رسم کرده ایم، معادله ی این خط مماس را به دست آورید.	۱
۱۰	حدود k را طوری به دست آورید که $x^{۲}+y^{۲}-۱۲x+۱۶y+k=۰$ بتواند معادله یک دایره باشد.	۰/۷۵
۱۱	سهمی به معادله ی $y^{۲}-۴y-۱۶y+۱۸=۰$ را در نظر بگیرید. الف) معادله متعارف و فاصله کانونی را بیابید ب) مختصات راس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۲	مختصات نقاط برخوردسهمی $y^{۲}+۵x+۲=۰$ و دایره ی $x^{۲}+y^{۲}=۳۶$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	معادله سهمی $x^{۲}-۸=۱۶y+۸$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و راس آن را تعیین کنید	۱/۵
۱۴	الف) طول بردار $\vec{a}=(۲,۳,۴)$ را به دست آورید. ب) شکل کلی(نمودار) مربوط به روابط $-۳\le y\le -۲$ و $y\prec -x^{۲}+۲$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	۱/۵
۱۵	زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,k)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ ۴۵ درجه باشد، مقدار k را بیابید.	۱/۵
۱۶	مقدار n را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(n,+۱,۳)$ و $\vec{b}=(۱,۲n+۱,-۱)$ بر هم عمود باشند.	۱/۲۵
	پیروز و سربلند باشید.	

الف) ماتریس است چون A^{-1} به طوری که $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$ (منحصر به فرد)

ب) داخل $O(1, -1)$ $\quad OA = 1 \quad R = \sqrt{2} \quad \sqrt{2} > 1$

ج) بله

د) صفر

۱-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & 10 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \\ -13 & -11 & -7 \end{bmatrix}$$

۲- الف)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 6 & 13 & 8 \\ 7 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

۴- الف)

$m - 2 = 0 \longrightarrow m = 2 \qquad m = n \longrightarrow n = 2$

ب)

برحسب سطر اول

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times (2 - 0) - 2 \times (0) + 3 \times (0 + 1) = 1$$

۵-

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 8-7=1 \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

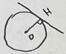
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

۶-

$4x-6y+4=0 \qquad OH=R$

$O(2,-2)$



$$OH=\frac{|8+12+4|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{24}{\sqrt{52}}=\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$$

معادله دایره $\longrightarrow (x-2)^2+(y+2)^2=\frac{144}{13}$

۷-

$x^2+y^2-2x=3 \qquad 4x-6y=0$

$O(1,0) \quad R=2$ فاصله مرکز تا خط $=\frac{|4|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{2\sqrt{13}}{13} \qquad \frac{2\sqrt{13}}{13}<2$ متقاطع

۸-

$x^2+y^2-2x=80 \qquad O_1(1,0) \qquad R_1=9$

$x^2+y^2=4 \qquad O_2(0,0) \qquad R_2=2$

$O_1O_2=1 \qquad O_1O_2 < R_1-R_2 \longrightarrow$ متداخل

۹-

$x^2+y^2-4x-4y-3=0$

$O(2,2) \qquad H(3,4) \qquad m_{OH}=\frac{4-2}{3-2}=2$

$m_{OH}\times$ شیب مماس $=-1 \longrightarrow$ شیب مماس $=-\frac{1}{2}$

معادله مماس $\longrightarrow (y-4)=-\frac{1}{2}(x-3)$

۱۰-

$a + b - 4c > 0 \longrightarrow (12)^2 + (16)^2 - 4k > 0$

$400 - 4k > 0 \qquad 100 > k$

۱۱- الف)

$y^2 - 6y - 14y + 18 = 0$

$y^2 - 20y + 18 = 0 \qquad y^2 - 20y + 100 - 100 + 18 = 0 \qquad (y-10)^2 - 82 = 0 \qquad (y-10)^2 = 82$

ب)

راس $(\;, 10)$ کانون $(\;, 10)$ خط هادی $x =$

۱۲-

$y^2 + 5x + 3 = 0 \qquad y^2 = -5x - 3 \qquad F\left(-\frac{28}{20} , 0\right)$

$x^2 + y^2 = 36$

$\Rightarrow x^2 - 5x - 3 = 36 \qquad x^2 - 5x - 39 = 0 \nearrow \frac{5+\sqrt{181}}{2} \quad \searrow \frac{5-\sqrt{181}}{2} \checkmark$

$y^2 = -5\left(\frac{5-\sqrt{181}}{2}\right) - 3 = \frac{-25 + 5\sqrt{181} - 6}{2} = \frac{5\sqrt{181} - 31}{2}$

$\left(\frac{5-\sqrt{181}}{2} , \sqrt{\frac{5\sqrt{181} - 31}{2}}\right)$ و $\left(\frac{5-\sqrt{181}}{2} , -\sqrt{\frac{5\sqrt{181} - 31}{2}}\right)$

۱۳ -

$x^2 = 16y + 16$ $\quad$ $x^2 = 16(y+1)$ $\quad$ $4a=16 \to a=4$

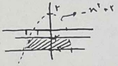
کانون $(3 \text{ و } 0)$

راس $(-1 \text{ و } 0)$

---

۱۴ - الف) $|a| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$

ب)



---

۱۵ -

$a = (2, -1, k)$ $\quad$ $b = (1, 0, -1)$

$a \cdot b = (2 + 0 - k) = |a||b| \cos 45 = \sqrt{5+k^2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 - k = \sqrt{5+k^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 + 4 - 4k = 5 + k^2$ $\quad$ $-4k = 1$ $\quad$ $k = -\frac{1}{4}$

---

۱۶ - اگر دو بردار بر یکدیگر عمود باشند ضرب داخلی آنها صفر است

$a \cdot b = n + 2n + 1 - 3 = 0$

$3n - 2 = 0$

$3n = 2$

$n = \frac{2}{3}$

آزمون شبه نهایی هندسه ۳ (استان کهگیلویه و بویراحمد)

۱- الف) منحصر به فرد   ب) داخل   ج) یک   د) صفر

۲-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & 10 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \\ -13 & -11 & -7 \end{bmatrix}$$

۳- الف)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 6 & 13 & 8 \\ 7 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

۴- الف) درایه‌های واقع بر قطر یک ماتریس اسکالر برابر یکدیگرند و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی چنین ماتریسی برابر صفر هستند، پس داریم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ m=n \xrightarrow{m=2} n=2 \end{cases}$$

ب) با استفاده از بسط برحسب سطر دوم ماتریس داریم:

$$|A| = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

۵-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2\times 4 - 1\times 7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

۶- فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

$$R=\frac{|4(2)-6(-2)+4|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}}=\frac{24}{2\sqrt{13}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{144}{13}$

۷- فاصلهٔ مرکز دایره از خط و نیز اندازهٔ شعاع دایره را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم :

$$x^2+y^2-2x-3=0$$

مرکز دایره : $O(1,0)$ و شعاع دایره : $R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2-4(-3)}=2$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط : $d=\frac{|4(1)-6(0)|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{2}{\sqrt{13}}<2 \Longrightarrow d<R \Longrightarrow$ خط و دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند

۸-

$C:\ x^2+y^2-2x-80=0$

مرکز : $O(1,0)$ ، شعاع : $R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2-4(-80)}=9$

$C':\ x^2+y^2=4$

مرکز $O'(0,0)$ و شعاع : $R'=2$

$$OO'=\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2}=1$$

$1<9-2 \Longrightarrow OO'<|R-R'| \Longrightarrow$ دو دایره متداخل اند

۹- خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است.
اگر مرکز دایره را با O و خط مماس را با d نمایش دهیم، آنگاه داریم :

$$x^2+y^2-4x-4y-3=0 \Longrightarrow O(2,2)$$

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{4-2}{3-2}=2 \Longrightarrow m_d=-\frac{1}{2}$$

معادلهٔ خط مماس : $y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \xrightarrow{\times 2} 2y-8=-x+3$

$$\Longrightarrow x+2y=11$$

۱۰- شرط دایره بودن: $a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow (-12)^2+16^2-4k>0$

$\Rightarrow 144+256>4k \Rightarrow 4k<400 \Rightarrow k<100$

۱۱- الف)

$y^2-4y-16x+18=0 \Rightarrow y^2-4y=16x-18$

$\xrightarrow{+4} y^2-4y+4=16x-14 \Rightarrow (y-2)^2=16(x-\frac{7}{8})$

$4a=4 \Rightarrow$ فاصلهٔ کانونی: $a=1$

ب) رأس: $A(\frac{7}{8}, 2)$

سهمی رو به راست باز می‌شود، بنابراین داریم:

کانون: $F(h+a,k)=(\frac{7}{8}+1, 2)=(\frac{15}{8}, 2)$

خط هادی: $x=h-a=\frac{7}{8}-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{8}$

۱۲-

$x^2+y^2=36 \Rightarrow y^2=36-x^2$

$y^2+5x+3=0 \Rightarrow 36-x^2+5x+3=0$

$\Rightarrow x^2-5x-39=0$

$\Delta=(-5)^2-4(-39)=181 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{181}}{2}$

چون نقطهٔ $A(-\frac{3}{5}, 0)$ رأس سهمی است و سهمی رو به چپ باز می‌شود، پس تنها مقدار $x=\frac{5-\sqrt{181}}{2}$ قابل قبول است.

$y^2=36-\left(\frac{5-\sqrt{181}}{2}\right)^2=36-\frac{206-10\sqrt{181}}{4}$

$\Rightarrow y^2=\frac{10\sqrt{181}-62}{4}$

۱۳-

$x^2-8=16y+8 \Rightarrow x^2=16y+16$

$\Rightarrow x^2=16(y+1)$

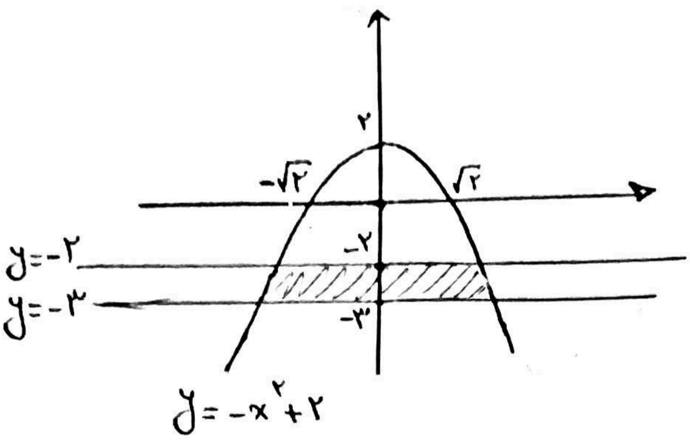
رأس: $A(0,-1)$ و $4a=16 \Rightarrow a=4$

سهمی رو به بالا باز می‌شود، پس داریم:

کانون: $F(h,k+a)=(0,-1+4) \Rightarrow F(0,3)$

۱۴- الف) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$

ب) ناحیهٔ هاشورخورده در شکل، معادل رابطهٔ داده شده است.



۱۵-

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+0-k}{\sqrt{4+1+k^2}\times\sqrt{1+0+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-k}{\sqrt{5+k^2}\times\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{5+k^2} = 2(2-k)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5+k^2} = 2-k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5+k^2 = 4-4k+k^2$$

$$\Rightarrow 4k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

۱۶-

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow n + 2n + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3n = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$$